

---

---

# EVALUACIÓN INDIRECTA DE LOS MÓDULOS ELÁSTICOS DE RIGIDEZ IN SITU Y LA RELACIÓN ENTRE $V_P/V_S$ Y EL ÁNGULO DE FRICCIÓN INTERNA

Alfonso Alvarez Manilla Aceves  
Paul Garnica Anguas  
Alfonso Pérez Salazar

Publicación Técnica No. 225  
Sanfandila, Qro, 2003

---

**SECRETARIA DE COMUNICACIONES Y TRANSPORTES  
INSTITUTO MEXICANO DEL TRANSPORTE**

**Evaluación indirecta de los  
Módulos elásticos de rigidez  
“in situ” y la relación entre  $V_P/V_S$   
y el ángulo de fricción interna**

**Publicación Técnica No. 225  
Sanfandila, Qro, 2003**

---

---

Este documento se desarrolló en el área de Geotecnia Ambiental y Aplicada de la División Laboratorios de Infraestructura del Instituto Mexicano del Transporte por el MC Alfonso Alvarez Manilla Aceves, con base en las discusiones acerca de la linealidad con el Dr Paúl Garnica Anguas y los comentarios del Ing Alfonso Pérez Salazar.

Se agradece la colaboración en el avance del conocimiento del comportamiento de los suelos al LJG Juventino García Becerra, quién amablemente proporcionó una gran cantidad de datos de los ensayos triaxiales, y permitiendo oportunamente medir la velocidad de propagación de las ondas de compresión y corte para llegar a esta primera correlación entre la relación de “ $V_p/V_s$ ” y el ángulo de fricción interna, al menos en los suelos y rocas dentro del valle y zona metropolitana de Querétaro.

La asociación entre el ángulo de fricción interna-relación de Poisson-velocidades de compresión y corte, deducidas por el MC Alfonso Alvarez Manilla Aceves en esta primera etapa, constituyen una gran aportación para caracterizar “in situ” la resistencia al esfuerzo cortante y rigidez del material, al nivel de esfuerzos que el método sísmico trabaja.



<b>Resumen</b>	VIII
<b>Abstract</b>	IX
<b>Resumen ejecutivo</b>	XI
<b>Introducción</b>	1
<b>1. Las dos clases de Fuerza</b>	2
1.1 Las fuerzas de cuerpo	2
<b>2. Las fuerzas de superficie</b>	2
2.1 La resistencia al corte y el ángulo de fricción interna	2
2.2 La Fricción y la ley de Amonton	3
2.2.1 El Angulo de reposo	4
2.2.2 El ángulo de fluencia inicial	4
2.2.3 El ángulo de corte residual	4
<b>3. La rigidez o firmeza (strength)</b>	5
2.1 Midiendo el comportamiento esfuerzo-deformación	5
2.2 Definiciones de rigidez	6
2.3 Falla, criterio de Navier-Coulomb	8
2.4 Fricción y fallamiento en la corteza terrestre	10
2.5 Estado de esfuerzos en el subsuelo y trayectorias	10
<b>3. La Elasticidad</b>	11
3.1 Ley de Hooke	11
3.2 Módulo de Rigidez	12
3.3 Módulo de Bulk	12
<b>4. Ecuación de movimiento de Claude Navier</b>	13
4.1 Aplicación a las ondas sísmicas	13
4.2 Tipos de ondas y sus características	14
4.3 Ecuaciones para las ondas “P” y “S”, y velocidades “Vp” y “Vs”	15
<b>5. Los módulos elásticos dinámicos, y su relación con el ángulo de fricción interna</b>	17
5.1 Interpretación de las ondas Vp y Vs en sismología de refracción	17
5.2 Carta de relación entre el radio Vp/Vs y el ángulo de fricción interna	18
<b>Referencias</b>	25

---

## Índice de Figuras

- Fig 1.1. Plano de deslizamiento entre dos capas de granos de suelo, y entre pseudo estratos de roca que explica la fricción
- Fig 2.1. Datos experimentales de ensayos triaxiales de un suelo no saturado, a, b y c.
- Fig 2.2. Tipos de falla en los especímenes
- Fig 2.3. Rigidez plástica ideal
- Fig 2.4. Rigidez elasto-plástica perfecta.
- Fig 2.5. Rigidez pico y residual
- Fig 2.6. Rigidez por endurecimiento
- Fig 2.7. Cambios de la rigidez a profundidad en la litosfera
- Fig 2.8 Elipsoide de deformación por el empuje resultante en una cisterna
- Fig 3.1. Ley de Hooke y la extensión de una barra
- Fig 4.1. Efecto de la Onda "P"
- Fig 4.2. Efecto de la Onda "S" en el medio de propagación
- Fig 5.1. Gráficas tiempo-distancia para determinar las velocidades "Vp" y "Vs"
- Fig 5.2. Círculos de Mohr para los suelos antropogénicos.
- Fig 5.3. Zanja para muestrear los suelos antropogénicos.
- Fig 5.4. Círculos de Mohr para suelos del tipo limosos
- Fig 5.5. Variación de la relación de vacíos en suelos colapsables, expansivos e inertes
- Fig 5.6. Variación de la relación de vacíos a profundidad
- Fig 5.5. Asociación entre la relación de vacíos y el módulo de rigidez Dinámico
- Fig 5.6. Relación entre la razón "Vp/Vs" y el ángulo de fricción interna, suelos "MH"
- Fig 5.7. Relación entre la razón "Vp/Vs" y la relación de Poisson

---

## Índice de tablas

Tabla 5.1      Resumen de los datos interpretados de las gráficas tiempo-distancia



---

## Resumen

El comportamiento mecánico de los materiales geológicos está regulado por su densidad; dentro del rango elástico, la Relación de Poisson y los Módulos Elásticos Dinámicos expresan numéricamente las características de su rigidez.

Evaluando "in situ" la Relación de Poisson y los Módulos Elásticos Dinámicos asociados a su masa, se presentan las cartas que asocian a la razón " $V_p/V_s$ " y los parámetros de resistencia; en esta etapa se han considerado suelos de la Depresión del Bajío.

Se espera que esta Publicación Técnica sirva para incentivar el desarrollo de este conocimiento de los suelos y rocas de otras provincias fisiográficas.

---

## Abstract

The mechanical behavior in geological materials is controlled by their density, between an elastic range, Poisson's Ratio and elastic dynamic modulus, which express in a numerical way their characteristics about strength.

Poisson's ratio evaluated "in situ" and elastic dynamic modulus related to their mass are showed in chart that including the relationship  $V_p/V_s$  and strength parameters as cohesion and internal friction angle.

It is very important to clear that the charts were built up for the soils and rocks located at the Bajío Mexicano.

The hope of this technical report is to be useful in order to get an interesting about develop knowledge on rocks and soils mechanical behavior of other physiographic regions.



---

## Resumen ejecutivo

Este trabajo se realizó ante la inquietud de evaluar de manera indirecta uno de los principales parámetros de resistencia –el ángulo de fricción interna- mediante la técnica de sismología de refracción, que depende básicamente de la estructura de los materiales geológicos y no de los fluidos que los saturan.

Midiendo las velocidades de propagación de las ondas de compresión y corte con los sondeos sísmicos de refracción, y, tras determinar los pesos volumétricos de los materiales en estudio, se obtiene la cuantificación de la Relación de Poisson y de los Módulos Elásticos Dinámicos; datos con los que es factible calcular las deformaciones inmediatas.

Los geofísicos dedicados a la exploración del petróleo han detallado la compacidad, fracturamiento, porosidad, y maleabilidad de los materiales geológicos así como la cuantificación de los yacimientos de hidrocarburos a través de las mediciones de las ondas  $V_p$  y  $V_s$  asociadas a la Relación de Poisson.

En este trabajo se proponen tres “cartas”; en todas interviene la razón “ $V_p/V_s$ ” con la Relación de Poisson, que tiene que ver con la maleabilidad o deformabilidad de las rocas y suelos, con la cohesión, y el ángulo de fricción interna.

Todo ello permite que en lugares difíciles para extraer y ensayar mediante pruebas triaxiales los materiales geológicos, o aquellos nuevos como los rellenos antropogénicos, del codominio de la relación  $V_p/V_s$  se pueda estimar de manera confiable una cohesión, y un ángulo de fricción interna.

Se aclara que estas cartas fueron realizadas para los suelos limo-arcillosos en la Subprovincia Fisiográfica Depresión del Bajío.

---

## Introducción

Para establecer la relación que existe entre la densidad de los materiales geológicos y la estructura que describe su comportamiento mecánico, se hace un desarrollo de lo que son las fuerzas de cuerpo, inerciales, la ecuación de movimiento, la dependencia de la propagación de las ondas elásticas de los módulos elásticos dinámicos como es el de Rigidez y el de Bulk, y su evaluación en campo.

Con la técnica de sismología de refracción para medir las velocidades de propagación de las ondas de compresión  $V_p$  y corte  $V_s$  "in situ", se evalúa dentro del nivel de esfuerzos de los ensayos triaxiales, la razón  $V_p/V_s$  y el ángulo de fricción interna.

Con estos datos y los pesos volumétricos, obtenidos de manera fácil y económica, se pueden realizar los análisis de estabilidad de taludes y laderas, empuje de tierras, análisis de capacidad de carga, y asentamientos entre otros.

Finalmente se presenta la carta de relación entre " $V_p/V_s-\phi$ " para los suelos estudiados.

---

## **1. Las dos clases de Fuerza**

Para los análisis propios de la ingeniería existen dos tipos de fuerzas, las que se ejercen sobre la masa y aquellas en las superficies.

### **1.1 La fuerza de cuerpo**

Actúa sobre cada elemento de la masa del cuerpo y se expresan como fuerza por unidad de masa, por ejemplo, la fuerza de gravedad por unidad de masa es la aceleración debido a la gravedad  $\Delta g$ ; es la acción de cuando se desliza una masa de roca sobre otra por acción de la gravedad.

Las rocas están formadas de juntas, diaclasas, fallas y algunas otras superficies de deslizamiento, la fricción es la fuerza que se opone a ese deslizamiento. De manera experimental, se le aplica a un cuerpo una fuerza normal seguida de un esfuerzo cortante hasta que se provoca el deslizamiento.

### **1.2 Las fuerzas de superficie**

Tienen un sentido matemático; actúan a lo largo de superficies reales o imaginarias, y se expresan como fuerza por unidad de área. Un ejemplo es el esfuerzo infringido a un cuerpo de roca para comprimirlo.

Para un ensaye triaxial, la muestra se prepara como un cilindro; la superficie curva del cilindro se comprime con una presión de confinamiento para posteriormente aplicar una carga en las superficies planas.

El espécimen sufre un acortamiento a lo largo de su eje y un ensanchamiento en la dirección normal; al incrementar la carga, la muestra falla por cortante.

### **1.3 La resistencia al corte y el ángulo de fricción interna**

Para ambos casos, cuando los esfuerzos de corte exceden a la “rigidez o firmeza” del material geológico, éste se rompe, fluyendo los bloques. La resistencia al corte y rigidez de un material geológico pueden estimarse en función de su fricción interna o ángulo de fricción interna.

El concepto de fricción interna puede extenderse a materiales que se deforman plásticamente, tales como los fluidos verdaderos cuya resistencia a fluir por cortante se mide por la viscosidad, la cual puede ser medida de la fricción interna.

La mayoría de las rocas y suelos, dependiendo de la presión de confinamiento, muestran un comportamiento intermedio entre fluidos y sólidos como los diapiros de arcilla y sal inmersos en estructuras sedimentarias marinas.

## 1.4 La Fricción y la ley de Amonton

A lo largo de las superficies definidas por juntas, diaclasas, fallas y otras zonas de debilidad actúa la “fricción” (fig 1.1) haciéndolo en dirección opuesta a la fuerza que provoca el deslizamiento, según la tercera ley de Newton.

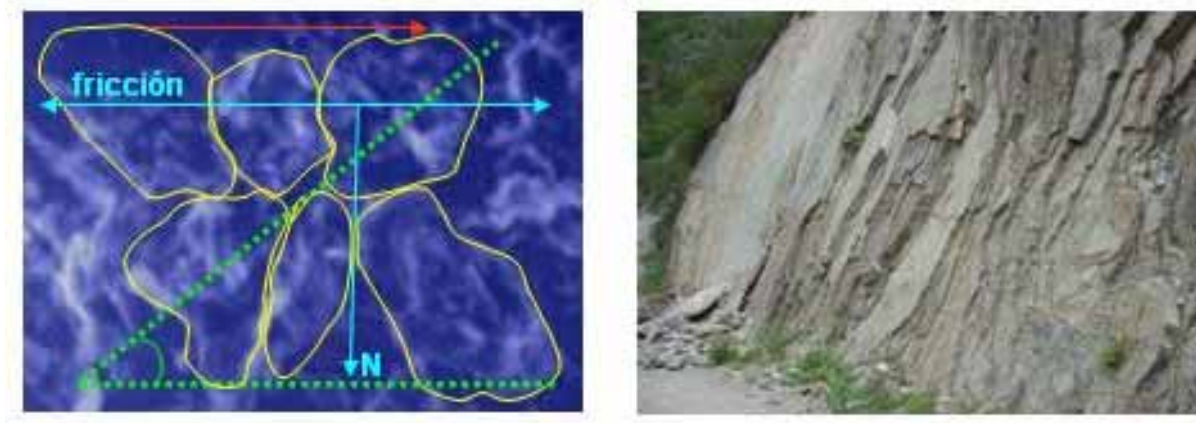


Fig 1.1. Plano de deslizamiento entre dos capas de granos de suelo, y entre pseudo estratos de roca que explica la fricción

La fricción también se conoce como la fuerza de corte friccionante; y a la fuerza normal o de carga se le denomina presión. La razón (F/N) entre la fuerza friccionante “F” y la presión normal “N”, es “grosso modo” una constante dada por:

$$F/N = f = \tan \phi \quad (1)$$

Siendo “  $f$  ” el coeficiente de fricción y “  $\phi$  ” denominado como ángulo de corte friccionante, ángulo de fricción interna o ángulo de reposo. La expresión 1 se debe al científico francés Guillaume Amonton quién en 1699 propuso su ley de fricción, expresión que tomaría posteriormente Charles Augustin Coulomb (1776) para proponer su ley de resistencia al cortante “  $\tau$  ” a lo largo de un plano de falla potencial dada por:

$$\tau = c + N \tan \phi \quad (2)$$

en donde “  $c$  ” es la cohesión del material. La expresión 2 es una “ecuación lineal” que modificaría Karl Von Terzaghi introduciendo las relaciones de poro dando por resultado:

$$\tau = c + (P-u) \tan \phi \quad (3)$$

Siendo la cantidad  $P-u$  el esfuerzo efectivo para suelos y rocas, mejorando notablemente las predicciones del comportamiento de la resistencia al esfuerzo cortante del suelo.

### 1.4.1 El ángulo de reposo

Al observar las geometrías de la fig 1.1, tanto para suelos como para rocas, se deduce que el ángulo de reposo máximo, es el ángulo máximo de una pendiente de roca o de suelos. Se reconocen dos tipos:

### 1.4.2 El ángulo de fluencia inicial

Una pila de granos de suelo o una pendiente formada por pseudoestratos no puede ser más tendida allá de este ángulo, y

### 1.4.3 El ángulo de corte residual

A partir de este ángulo, las avalanchas o aludes cesan.

Un ejemplo geológico acerca de esta “autoorganización crítica” corresponde a los terremotos, donde:

***.....durante el fenómeno se da un gradual aumento en el esfuerzo elástico hasta que se sobrepasa la fricción interna, provocando la falla a lo largo de una superficie que depende de las características del material geológico en cuestión.....***

Los trabajos de Bak, et al. (1988) y Mehta, (1992) han dado la luz para explicar el cómo y el por qué suceden las avalancha y terremotos.



## 2. La rigidez o firmeza (strength) de los materiales geológicos

Se debe entender por firmeza o rigidez de los materiales el esfuerzo necesario que se requiere para producir una deformación permanente de manera significativa; o bien la rigidez es el esfuerzo que produce la falla.

### 2.1 Midiendo el comportamiento esfuerzo-deformación.

Debido a la gran variación de los estilos y magnitudes de deformación en los materiales geológicos, no es fácil medir la firmeza o rigidez, una forma simple y controlada es a través de las “pruebas de compresión triaxial”; no es objeto de este escrito describirlas, pueden consultarse las obras de Juárez B E y Rico R A.

La deformación es, pues, una medida de la fatiga “ $\varepsilon$ ” proporcional al cambio en la longitud del espécimen, y se visualiza gráficamente en el espacio dado por “ $\varepsilon$ ” y “ $\sigma_1 - \sigma_2$ ”. La fig 2.1 muestra los datos experimentales de las trayectorias esfuerzo deformación, mientras que la fig 2.2 los tipos de falla de acuerdo con la relación entre presión de confinamiento y la rigidez del material geológico.

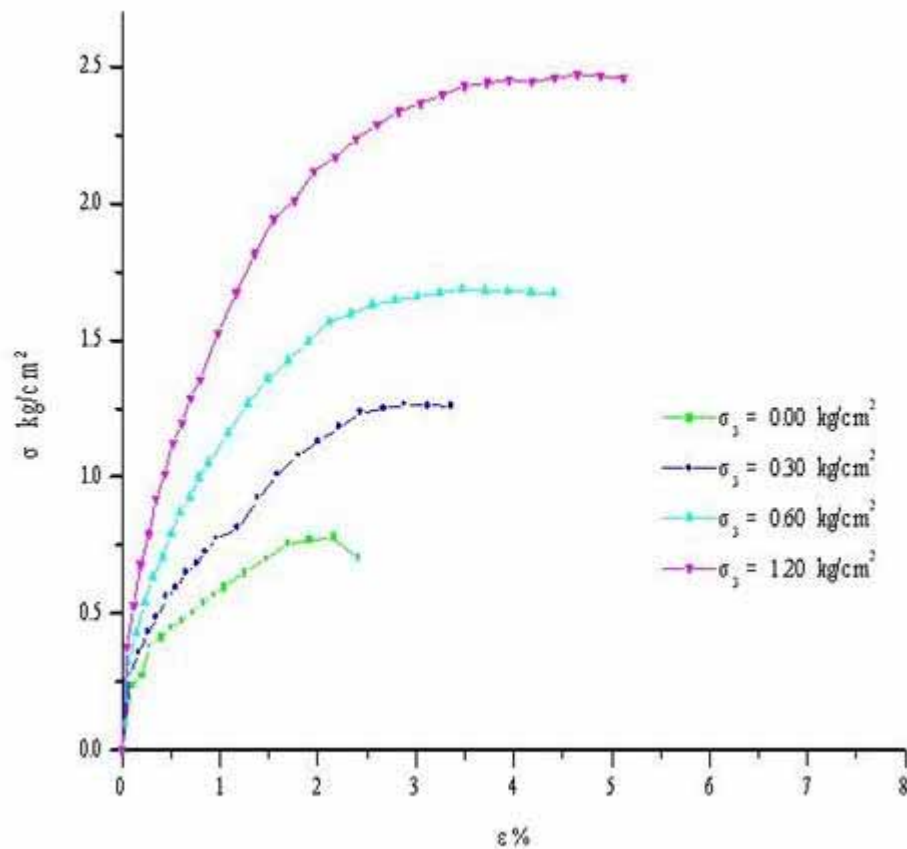


Fig 2.1. Datos experimentales de ensayos triaxiales de un suelo no saturado

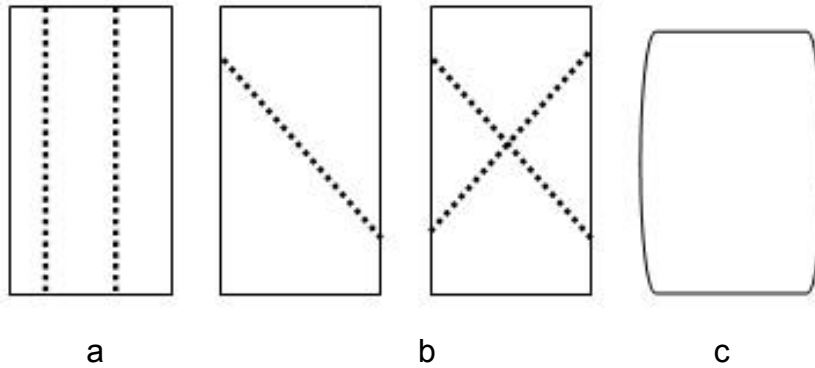


Fig 2.2. Tipos de falla en los especímenes

Para una roca no porosa y a bajas presiones de confinamiento, esta se comprime elásticamente hasta que falla (fig 2.2<sup>a</sup>); es lo que sucede a los estratos usualmente de suelos; para presiones de confinamiento intermedias, la falla sucede en superficies inclinadas(fig 2.2b) simples o conjugadas, la deformación continua por deslizamiento a lo largo de estas superficies y a altas presiones de confinamiento por el endurecimiento de la roca se da una transición muy suave de la deformación elástica a la dúctil (fig 2.2c).

## 2.2 Definiciones de rigidez

Para describir la rigidez de un material se hace uso de los diagramas de esfuerzo-deformación mostrados en las figuras subsecuentes.

La fig 2.3 representa el comportamiento de falla ambiguo; cuando el esfuerzo alcanza el nivel  $\sigma(a)$ , el material se deforma instantáneamente y de forma continua conforme se aplica el esfuerzo; el valor  $\sigma(a)$  es la rigidez. Este es el característico comportamiento plástico, desafortunadamente los materiales geológicos no se comportan así.

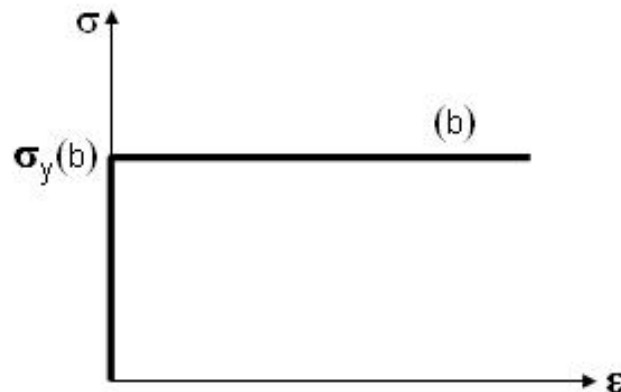


Fig 2.3. Rigidez plástica ideal

La fig 2.4 es un comportamiento típico a tensión de los materiales (Garnica A P y Alvarez Manilla A A, 2001); es el comportamiento elasto-plástico ideal. Las deformaciones por debajo del nivel de  $\sigma(b)$  son del tipo elástico, recuperable y proporcional al esfuerzo. El valor  $\sigma(b)$  es la rigidez del material. La fig 2.5 reseña el comportamiento típico de cualquier material geológico; representa la deformación elástica a bajos niveles de esfuerzo; se combina a altos niveles de esfuerzo con una deformación no elástica. Se presenta un esfuerzo pico “  $\sigma_p$  ” con una deformación máxima, la deformación continúa a bajos niveles de esfuerzo ”  $\sigma_r$  “, la cual se le denomina esfuerzo residual; ambos pasan a formar la rigidez pico y residual.

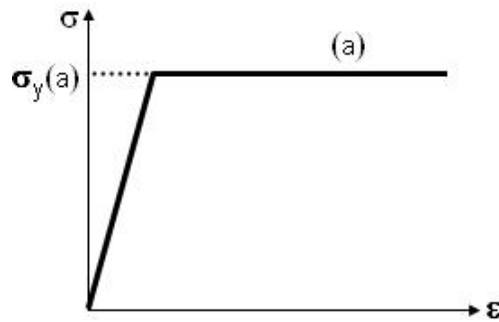


Fig 2.4. Rigidez elasto-plástica perfecta.

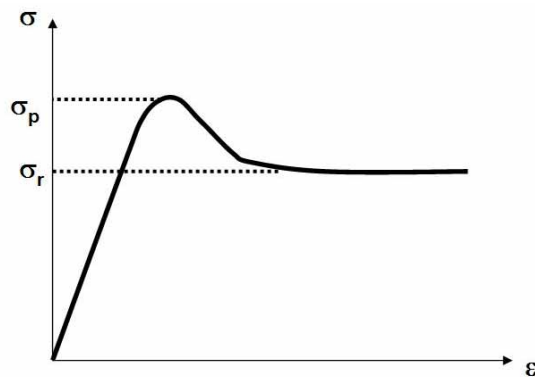


Fig 2.5. Rigidez pico y residual

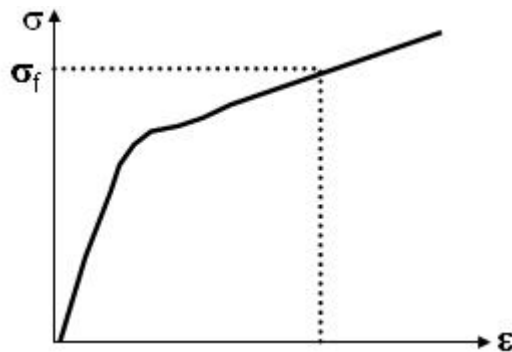


Fig 2.6. Rigidez por endurecimiento

El comportamiento de la rigidez en el material de la fig 2.6 también muestra dos segmentos, uno elástico y otro plástico. En este caso el material se convierte en más rígido con la deformación adicional; esto se conoce como endurecimiento por deformación, y es el comportamiento característico de todas las rocas conforme la profundidad a la que se localizan en el interior de la corteza terrestre.

Los materiales geológicos con la profundidad se convierten en más compactos debido a la presión litostática, por tanto, resulta en un incremento de la rigidez y un incremento en la velocidad de propagación de las ondas elásticas. En 1951 se propuso una expresión empírica para evaluar la dependencia de la velocidad de compresión con la profundidad, ésta es:

$$V_p = K(zt)^{1/6} \quad (4)$$

Siendo “ z “ la profundidad; “ t “ la edad geológica, y “ K “ una constante equivalente a 46.5 siempre y cuando la profundidad sea en metros y la edad en años.

A la vez se puede comprender que cualquier factor que afecta la densidad del material como puede ser la porosidad, fracturamiento, tipo de fluido contenido en los intersticios etc., trae un cambio en la velocidad de propagación; estas características cambian la rigidez y elasticidad del medio.

La velocidad “V” de un material poroso o con fracturas de porosidad “ n “ puede ser calculado según la “ecuación de tiempo promedio”, de la siguiente manera:

$$\frac{1}{V} = \frac{n}{V_f} + \frac{1-n}{V_m} \quad (5)$$

Donde  $V_f$  y  $V_m$  son las velocidades de propagación en el fluido y la matriz del material geológico.

Regresando a este compartimiento, resulta difícil evaluar la rigidez a la cual el material sufre deformaciones significantes que dañan su estructura. En la práctica común, este valor puede tomarse donde la frontera del comportamiento elástico y el de endurecimiento. De cualquier manera, el criterio de falla de Coulomb es un comportamiento lineal respecto al nivel de esfuerzo.

### 2.3 Falla, criterio de Navier-Coulomb

En las pruebas triaxiales los especímenes se llevan a la falla a varias presiones de confinamiento; la curva tangente (envolvente de falla) a todos los círculos de Mohr representa las condiciones de falla para un material geológico dado; esto de manera analítica queda expresado como:

$$\tau_c = f(\sigma) \quad (6)$$

Se debe mantener en mente que el esfuerzo constante necesario para producir la falla se incrementa conforme la presión de confinamiento crece (fig 2.1).

En el criterio de Navier-Coulomb se establece una fórmula para la función  $f(\sigma)$  dada por:

$$\tau_c = \tau_0 + \mu\sigma \quad (7)$$

Siendo “  $m$  ” el coeficiente de fricción interna que depende del ángulo de fricción interna “  $f$  ”, y toma la forma dada en la expresión 8.

$$\tau = c + \sigma \tan\phi \quad (8)$$

Siendo “  $\sigma$  ” el esfuerzo efectivo o “P-u”, de la ec 3.

Las envolventes de falla son prácticamente líneas rectas que describen la rigidez del material a un nivel y rango de esfuerzos principales; cuando se sobrepasa este nivel, indudablemente el material falla.

La energía sísmica liberada en un terremoto y las ondas propagándose en el medio generan la falla si las deformaciones, sobre todo las que producen las ondas de corte “S” exceden a su rigidez; como se verá la Relación de Poisson representa la maleabilidad de los materiales geológicos.

La evidencia geofísica y geológica de que la litosfera se puede dividir en dos regiones: la superior denominada “schizósfera” por Sholtz (1990) cuyo comportamiento es elástico y quebradizo, y la región inferior o “plastósfera”, la cual tiene un comportamiento dúctil o plástico y tiende más a fluir que a fracturarse (fig 2.7).

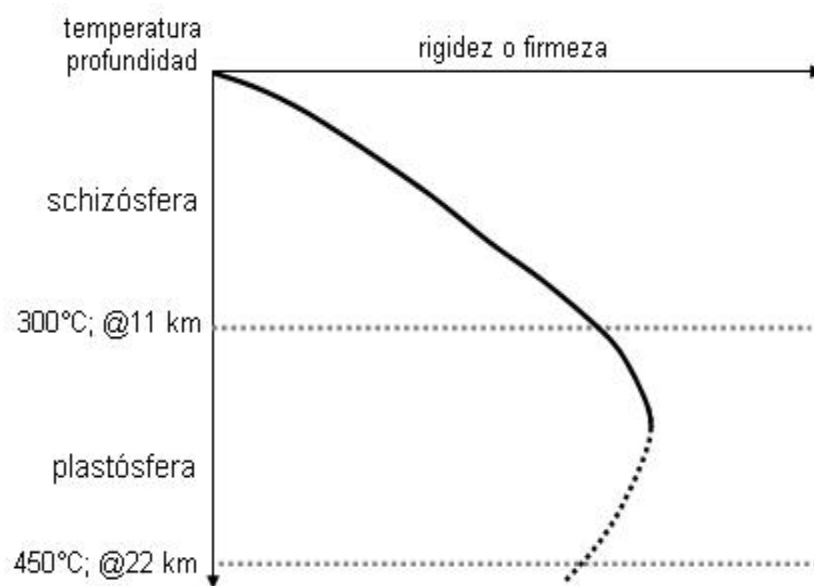


Fig 2.7. Cambios de la rigidez a profundidad en la litosfera

## 2.4 Fricción y fallamiento en la corteza terrestre

El estado de esfuerzos principales en un punto se describe por la magnitud y orientación de los esfuerzos principales en el punto, conociendo la medida, forma y orientación de la elipse de esfuerzos (fig 2.8).



Fig 2.8. Elipsoide de deformación por el empuje resultante en una cisterna

### 2.4.1 Estado de esfuerzos en el subsuelo y trayectorias

El estado de esfuerzos natural se debe al peso de los materiales en superficie; si se considera que el material es isotrópico y que solamente actúan las fuerzas de cuerpo, el esfuerzo vertical “ $\sigma_1$ ” tiene la magnitud:

$$\sigma_1 = \rho g z = \gamma z = p \quad (9)$$

Siendo “ $\rho$ ” la densidad, y “ $\gamma = \rho g$ ” el peso específico del material. Los esfuerzos horizontales en las direcciones “ $\sigma_2$ ”, “ $\sigma_3$ ” son iguales y proporcionales en una magnitud “ $k$ ” al esfuerzo principal “ $\sigma_1$ ”, de tal forma que:

$$\sigma_2 = \sigma_3 = k \sigma_1 = kp \quad (10)$$

Siendo “ $k$ ” el coeficiente de presión. Los estados de Rankine describen qué tan cerca de la falla se encuentra una porción de corteza, y su evaluación se hace a través del criterio de Navier-Coulomb.

El valor crítico de “ $t$ ” se alcanza según las magnitudes de los esfuerzos “ $\sigma_1$ ” y “ $\sigma_2$ ”, resultando las trayectorias de falla; para una completa demostración ver Terzaghi, K V, (1943).

---

### 3. La Elasticidad

A pesar de que los materiales geológicos muestran un comportamiento complejo en su relación esfuerzo-deformación, existen dos modelos teóricos los cuales explican de manera simple y bajo ciertas condiciones su comportamiento.

Los dos tipos de materiales son los “Hookianos sólidos elásticos” de donde se deriva la teoría de la elasticidad, y los “Newtonianos fluidos viscosos”.

En esta sección se presenta un ensayo sobre las bases de la elasticidad lineal, misma que se aplica para evaluar las deformaciones pequeñas o elásticas, como las que producen las ondas elásticas (ondas sísmicas) en las rocas.

#### 3.1 Ley de Hooke

En 1678 Robert Hooke publicó su ley, basado en un estudio de deformación en resortes, así se estableció que la relación lineal entre la componente del esfuerzo y la componente de la deformación sin diferenciar claramente “fuerza” de “esfuerzo”; entonces:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (11)$$

Siendo “ $\sigma$ ” el esfuerzo normal, “ $\varepsilon$ ” la elongación y “E” el coeficiente de proporcionalidad denominado “Módulo de Young”.

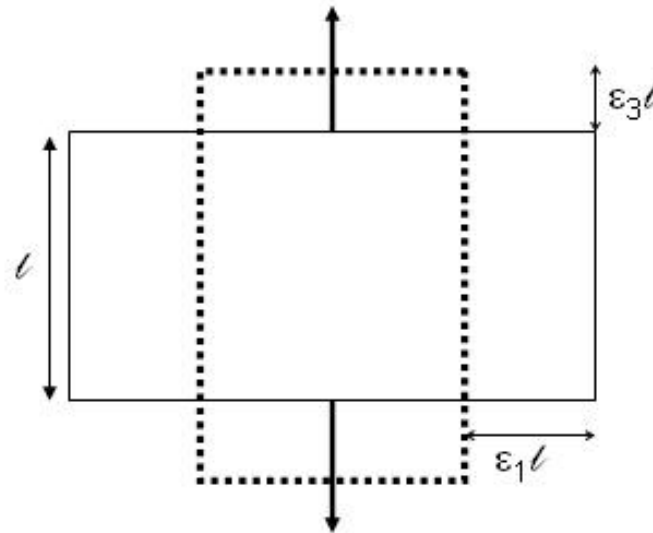


Fig 3.1. Ley de Hooke y la extensión de una barra

El Módulo de Young no es suficiente para explicar la relación entre el esfuerzo y la deformación, ya que a pesar de que la extensión “ $\varepsilon_3$ ” de la barra mostrada en la fig 3.1 obedezca la ley de Hooke, esta no solamente se extiende en la dirección de la tensión, sino que se contrae en los otros dos ejes, o sea: “ $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$ ”.

La razón entre la extensión y contracción respectivamente “  $\varepsilon_3/\varepsilon_1$  ” fue establecida por el científico francés Siméon Denis Poisson, como “Relación de Poisson,  $\nu$ ”, tal que:

$$\nu = \varepsilon_3/\varepsilon_1 \quad (12)$$

Si  $\varepsilon_3 = \sigma_3/E$  llevándose a cabo la contracción en las dos direcciones horizontales, entonces:

$$\varepsilon_2=\varepsilon_1= \nu\sigma_3/E \quad (13)$$

Si se asume que el material es incompresible, entonces la dilatación cúbica “  $\theta$  ” es:  $\theta = \varepsilon_1+ \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ , entonces:

$$\frac{1}{E} = (1 - 2\nu)\sigma_3 = 0 \quad (14)$$

### 3.2 Módulo de Rigidez

Se utiliza para describir el corte, considerando el corte simple “  $\eta$  ” como producto de un esfuerzo cortante “  $\tau$  ” y el Módulo de Rigidez , definido por:

$$\tau = G\eta \quad (15)$$

Realizando el álgebra de tensores, el Módulo de Rigidez se relaciona con el Módulo de Young y la Relación de Poisson, según la siguiente expresión:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (16)$$

Para los líquidos “G” es cero, pero no cuando los fluidos son viscosos y bajo ciertas condiciones de temperatura.

### 3.3 Módulo de Bulk

La relación lineal entre el cambio fraccional del volumen y la presión hidrostática aplicada a una masa de material geológico está gobernada por el Módulo de Incompresibilidad Volumétrica o de Bulk “K”, tal que:

$$\sigma = K\theta \quad (17)$$

La relación que guarda con el Módulo de Young y la Relación de Poisson es:

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (18)$$



---

#### 4. Ecuación de movimiento de Claude Navier.

Cuando se produce un disturbio en una porción de la capa de la Tierra, esta zona experimenta un movimiento violento propagándose en todas direcciones a una velocidad que depende de la naturaleza de las rocas.

En los lugares donde el suelo se puede considerar “homogéneo” similar a un sólido elástico, la perturbación se transmitirá en forma de “ondas elásticas” de dos tipos: “dilatación o compresión”, y “transversales o cizalla”.

La propiedad más importante que tienen los cuerpos es su “masa”; en mecánica del medio continuo se considera distribuida de manera uniforme. Sin importar como se deforma un cuerpo, su masa es la integral del campo de densidades  $\rho_0(p)$ .

Utilizando tanto las ondas de dilatación como las transversales, y en el entendimiento de que dependen básicamente del campo de densidades en el cuerpo donde se propagan, se puede hacer una evaluación de la “rigidez” del medio.

La ecuación de movimiento queda determinada, según Navier asociando las fuerzas inerciales y de cuerpo, que en notación vectorial es:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho Z + (\mu + \lambda) \nabla(\nabla \cdot u) + \mu \nabla^2 u \quad (19)$$

Siendo “ $\mu$ ” y “ $\lambda$ ” las constantes de Lamé, y “ $Z$ ” la fuerza de gravedad “ $g$ ” actuando sobre la masa “ $\rho$ ”.

##### 4.1 Aplicación a las ondas sísmicas

En la Tierra, las deformaciones lentas de la corteza hacen crecer el esfuerzo hasta que ésta se fractura y se da un rápido deslizamiento de bloques, seguidos por un período breve de movimiento oscilatorio, el cual es conocido como terremoto.

Los movimientos oscilatorios son las ondas sísmicas; su conocimiento es importante porque son las que ocasionan los daños en la superficie terrestre pero también proveen información acerca de la naturaleza del interior de la Tierra.

La propagación de las ondas elásticas permite conocer como se deforman las rocas elásticamente, además se puede determinar como se aceleran cuando se les aplica una fuerza.

La ecuación de onda tiene la forma:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (20)$$

“  $f$  “ es una función de la forma  $f(x-Ct)$  que representa una translación en el eje “ $x$ ” o en el que se propaga la onda a una distancia “ $Ct$ ” y transforma la función  $f(x)$  en  $f(x-CT)$ ; la dirección del movimiento es “ $x$ ” y la velocidad de propagación, “ $C$ ”.

## 4.2 Tipos de ondas y sus características

De manera artificial se pueden generar dos tipos de ondas que se propagan a través de la superficie y capas de diferente modo; son las Ondas de Compresión “P” y las de Corte “S”. Sus nombres nacen debido a la naturaleza de la deformación que provocan en el medio de propagación durante su paso.

El paso de las ondas “fuerza” la roca, induciendo una deformación proporcional al esfuerzo según lo estableció Hooke, está dado por:  $\varepsilon = E\sigma$ .

La onda “P” provoca un cambio de volumen pero no de forma en respuesta al esfuerzo de compresión y tensión; mientras que la onda “S” produce un cambio de forma pero no de volumen (fig 4.1).

La propagación de las ondas en un medio geológico está afectada por las propiedades físicas de las rocas; su velocidad es función directa de la elasticidad y densidad de la roca.

Las ondas “P” están afectadas por la “incompresibilidad” del material geológico así como de su rigidez.

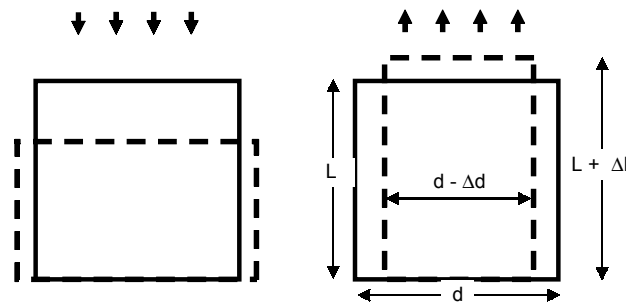


Fig 4.1. Efecto de la onda “P”

Las ondas “S” producen un cambio de forma, pero no de volumen (fig 4.2), y solamente dependen de la rigidez.

Gracias a estas diferencias ha sido posible identificar, en la amplitud de las ondículas de la reflexión de ondas, los cambios debidos a los fluidos en los poros, tales como: salmuera, gas y aceite, que afectan directamente la compresibilidad de la roca y no a la rigidez.

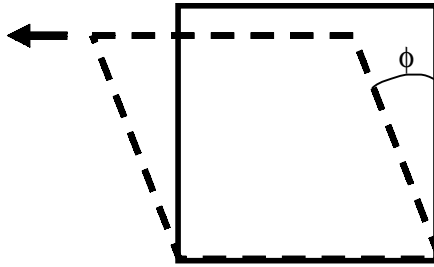


Fig 4.2. Efecto de la onda “S” en el medio de propagación

La velocidad a la cual cada tipo de onda viaja es función de la “elasticidad” del material geológico, y representan un sistema sinérgico. Por ello, en función de las velocidades de propagación –compresión y corte, la elasticidad del material se puede calcular; y si se añade el conocimiento de los pesos volumétricos, es factible evaluar las constantes elásticas dinámicas.

#### 4.3 Ecuaciones para las ondas “P” y “S”, y velocidades “Vp” y “Vs”

Las velocidades de propagación de las ondas de cuerpo están reguladas por los módulos elásticos “K” y “G” que representan las medidas cuantitativas de la capacidad de los materiales geológicos para resistir el cambio de volumen y forma cuando se someten a cambios de esfuerzo. Las velocidades de las ondas son:

$$V_p = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho}} \quad (21)$$

$$V_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (22)$$

La diferencia entre las ecs 21 y 22 ayuda en la exploración geofísica; “Vp” solo depende de la “K” y de “G”, mientras que la onda “Vs” únicamente de “G”; pero ambas están intrínsecamente relacionadas con la densidad “ρ”.

Las ondas “S” son insensibles al tipo del fluido de poro, excepto en la medida en que éste afecta la densidad; como no se pueden propagar en el fluido, la ec 21 toma la forma:

$$V_p = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad (23)$$

Los módulos de Bulk y Rigidez son constantes de proporcionalidad entre el esfuerzo y la deformación, son parámetros elásticos, mientras que la relación de Poisson representa la “maleabilidad” del material. La relación de Poisson está dado por:

$$\nu = \frac{0.5(V_P/V_S)^2 - 1}{(V_P/V_S)^2 - 1} \quad (24)$$

Por ejemplo, el Plomo (Pb) tiene una relación de Poisson  $\nu=0.4$ , cercano a 0.5 como el de un fluido. El granito posee una relación de Poisson  $\nu=0.25$ . Respecto a la velocidad de propagación del sonido en el agua es de 1440 m/s.

El volumen total de fluido “Vflui” puede ser expresado como la suma de volumen líquido “Vliq” y del volumen de gas “Vgas”; durante un cambio de presión se produce un cambio de volumen de tal forma que:

$$\Delta V_{flui} = \Delta V_{liq} + \Delta V_{gas} \quad (25)$$

El módulo de Bulk del líquido y gas están definidos por:

$$K_{liq} = -\frac{\Delta p}{\Delta V_{liq}/V_{liq}} \quad (26)$$

$$K_{gas} = -\frac{\Delta p}{\Delta V_{gas}/V_{gas}} \quad (27)$$

Al combinar las ecuaciones resulta:

$$K = \frac{K_{liq}}{1 + (V_{gas}/V)(K_{liq}/K_{gas} - 1)} \quad (28)$$

Si se expresa la densidad de la mezcla en términos del líquido y gas, se tiene:

$$\rho = \rho_{gas} \frac{V_{gas}}{V} + \rho_{liq} \frac{V_{liq}}{V} \cong V_p = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad (29)$$

Entonces, la velocidad de onda a través de la roca o concreto es:

$$V_p = \sqrt{\frac{K/\rho}{1 + (2K/G)(1 + \nu)}} \quad (30)$$

## 5. Módulos elásticos dinámicos y su relación al ángulo de fricción interna.

Con los pesos volumétricos y las magnitudes de las ondas de compresión “Vp” y de corte “Vs” se determina la Relación de Poisson “v”; con los pesos volumétricos se obtienen los Módulos Elásticos Dinámicos: Rigidez “G”, Young “E” y Bulk “K” para cada Unidad Geológica según las expresiones:

$$\begin{aligned} v &= \frac{\{(Vp/Vs)^2 - 2\}}{2\{(Vp/Vs)^2 - 1\}} && \text{Relación de Poisson} \\ G &= \rho Vs^2 && \text{Módulo de Rigidez} \\ E &= 2G(1 + v) && \text{Módulo Elástico} \\ K &= E/3(1 - 2v) && \text{Módulo de Bulk} \end{aligned}$$

### 5.1 Interpretación de las ondas Vp y Vs en sismología de refracción.

Ya sea de las mediciones de los tiempos de tránsito en campo o de la lectura de los mismos en los sismogramas, y atendiendo las respuestas de los sismos registrados en los geófonos de las componentes vertical y horizontal, se trazan las curvas domocrónicas de donde se evalúan las velocidades de compresión “Vp” y “Vs” (fig 5.1).

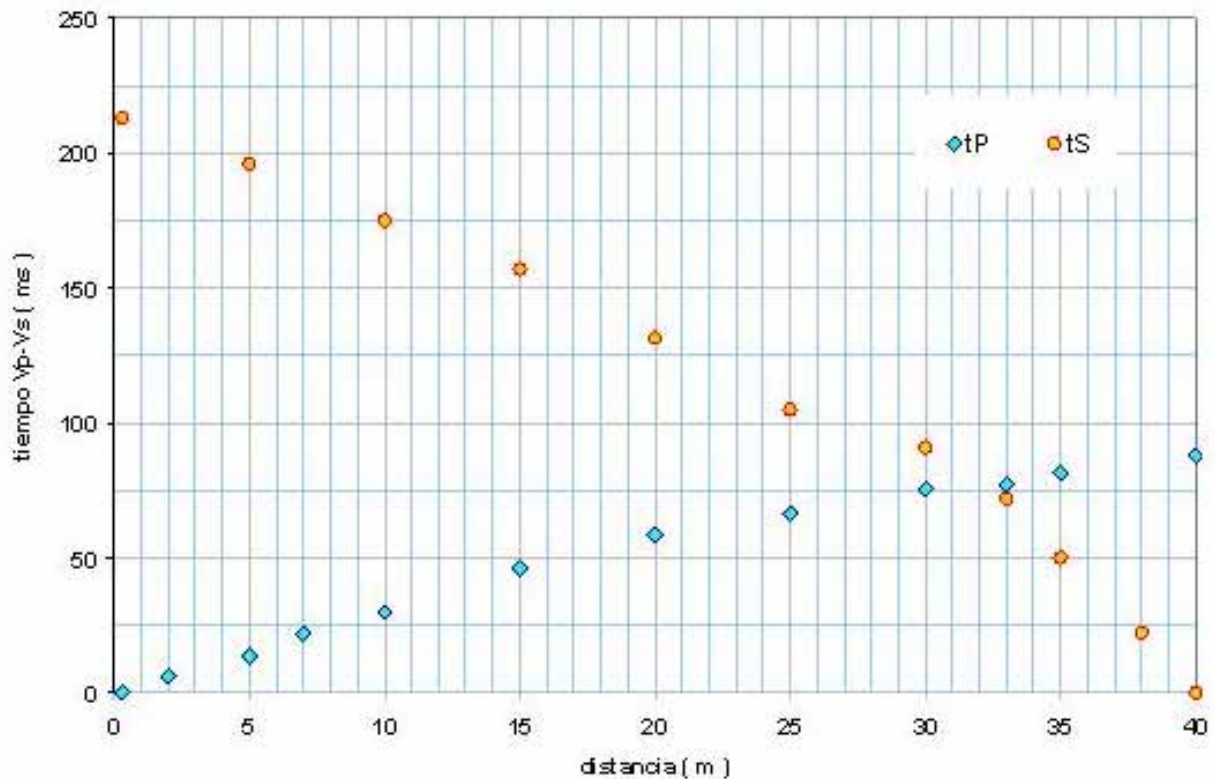


Fig 5.1. Gráficas tiempo-distancia para determinar las velocidades “Vp” y “Vs”

Con los valores de velocidad interpretados y los pesos volumétricos obtenidos en laboratorio para cada estrato diferenciado, se hace una tabla de la cual la Relación de Poisson y los Módulos Elásticos Dinámicos se calculan de manera analítica.

A la vez, con el Módulo de Young “E” es posible evaluar el Módulo Oedométrico “E<sub>oed</sub>” de donde se asocia con la Relación de Poisson de la siguiente manera:

$$E_{oed} = \frac{(1-\nu)E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad (30)$$

Con esto es posible especificar como una rigidez varía linealmente con la profundidad, según el algoritmo:

$$E_{actual} = E_{ref} + (y_{ref} - y)E_{incremento}, \quad (y - y_{ref}) \quad (31)$$

El inverso del Módulo de Young corresponde a la compresibilidad “m<sub>oed</sub>”; y con los espesores determinados de los sondeos de refracción sísmica o cortes litológicos de los pozos, se evalúa el período fundamental de vibración “T<sub>0</sub>”. La tabla 5.1 muestra los datos evaluados de la interpretación de las gráficas tiempo-distancia de la figura 5.1.

Tabla 5.1. Resumen de los datos interpretados de las gráficas tiempo-distancia

SSR	V <sub>p</sub>	V <sub>s</sub>	ν	G	E	K	E <sub>oed</sub>	m <sub>oed</sub>	T <sub>0</sub>
capa	m/seg	m/seg		kN/m <sup>2</sup>	kN/m <sup>2</sup>	kN/m <sup>2</sup>	kN/m <sup>2</sup>	m <sup>2</sup> /kN	seg
1	327	176	0.443	5.51 E+04	1.59 E+05	4.65 E+05	4.12 E+05	2.38 E-05	0.045459
2	926	465	0.332	3.99 E+05	1.06 E+06	1.05 E+06	1.27 E+06	7.74 E-06	0.17216
								T <sub>0</sub> =	0.217619

## 5.2 Carta de relación entre el radio V<sub>p</sub>/V<sub>s</sub> y el ángulo de fricción interna

Como se ha descrito, existe una relación intrínseca entre la masa de las rocas, suelos, propiedades mecánicas, y las velocidades de propagación de las ondas de compresión y corte.

Entendiendo que existen sitios, sobre todo en zonas de rocas y tobos, donde resulta poco manual y antieconómico obtener muestras para ensayos, se propone realizar las mediciones de tiempo de tránsito de las ondas elásticas; se determinó una relación entre las propiedades geofísicas y mecánicas de los materiales geológicos, incluyendo el concreto.

Los parámetros para realizar los análisis de capacidad de carga, estabilidad de taludes y laderas, análisis y diseño de los muros de retención, y estructura de terraplenes, entre otros, son los pesos volumétricos, el ángulo de fricción interna y la cohesión.

Los pesos volumétricos se pueden obtener a bajo costo, solamente se necesita estar entrenado para la selección apropiada de la muestra y que sea, en la medida de lo posible, representativa de las características físicas de las Unidades Geológicas en campo.

Los parámetros de resistencia son más costosos, inclusive requieren de mayor preparación y tiempo para los ensayos; por ello, evaluando las velocidades de propagación de las ondas elásticas se determinan en primera instancia: la “Relación de Poisson” y subsecuentemente los “Módulos Elásticos Dinámicos”.

En cuanto para adquirir el conocimiento y determinar si existía una relación entre el ángulo de fricción interna, Relación de Poisson y las velocidades de propagación de las ondas elásticas, se realizaron las medidas en un sólo estrato del cual se obtuvieron los parámetros de resistencia de ensayos de muestras inalteradas y debidamente preparadas; las pruebas correspondieron a suelos y rocas no saturadas del Valle de Querétaro, inclusive de suelos antropogénicos muy heterogéneos, en estos últimos se realizaron las determinaciones en muestras remoldeadas.

La generación de las ondas “S” se limitó a la fuente de energía, la cual fue un mazo de 40 kN, logrando detectar ondas “S” hasta una profundidad de 15 m. Cuando existió la oportunidad, se realizaron pozos a cielo abierto más profundos obteniendo las muestras inalteradas del segundo y tercer estratos.

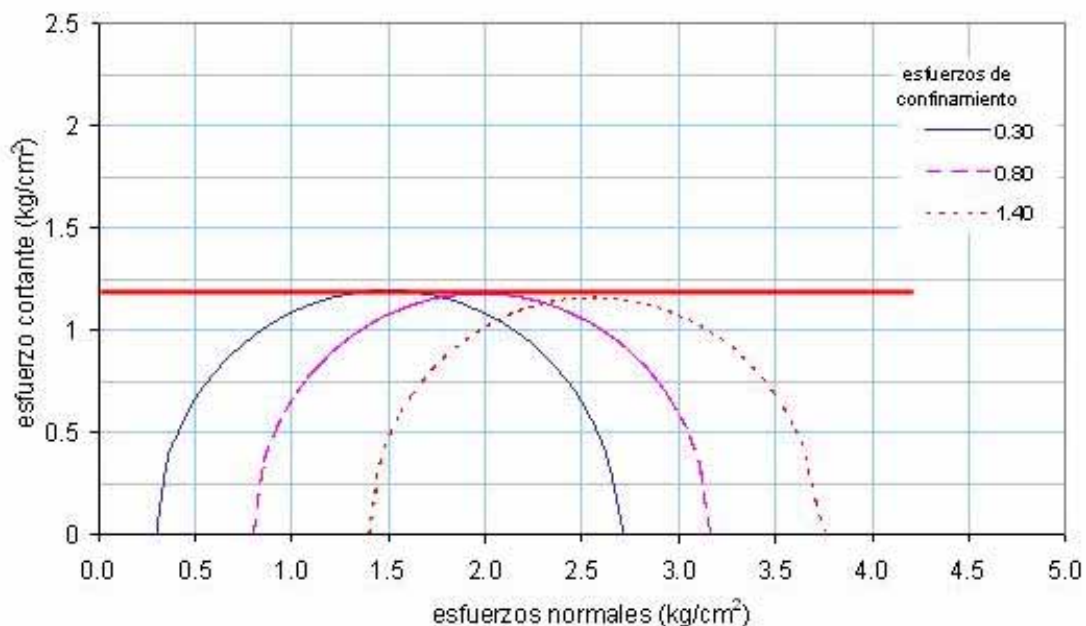


Fig 5.2. Círculos de Mohr para los suelos antropogénicos

En la fig 5.2 aparecen los círculos de Mohr para materiales antropogénicos, cuyas muestras se obtuvieron en pozos a cielo abierto y zanjas excavadas con retroexcavadora; respecto al ángulo de fricción interna, estos fueron las magnitudes más bajas.

En la fig 5.3 se presenta una excavación realizada para muestrear este tipo de suelos antropogénicos, nótese la basura, telas, plásticos, arcilla, agua estancada, etc....



Fig 5.3. Zanja para muestrear los suelos antropogénicos

Los parámetros de resistencia de mayor magnitud se obtuvieron de un limo de baja plasticidad; los círculos de Mohr aparecen en la fig 5.4.

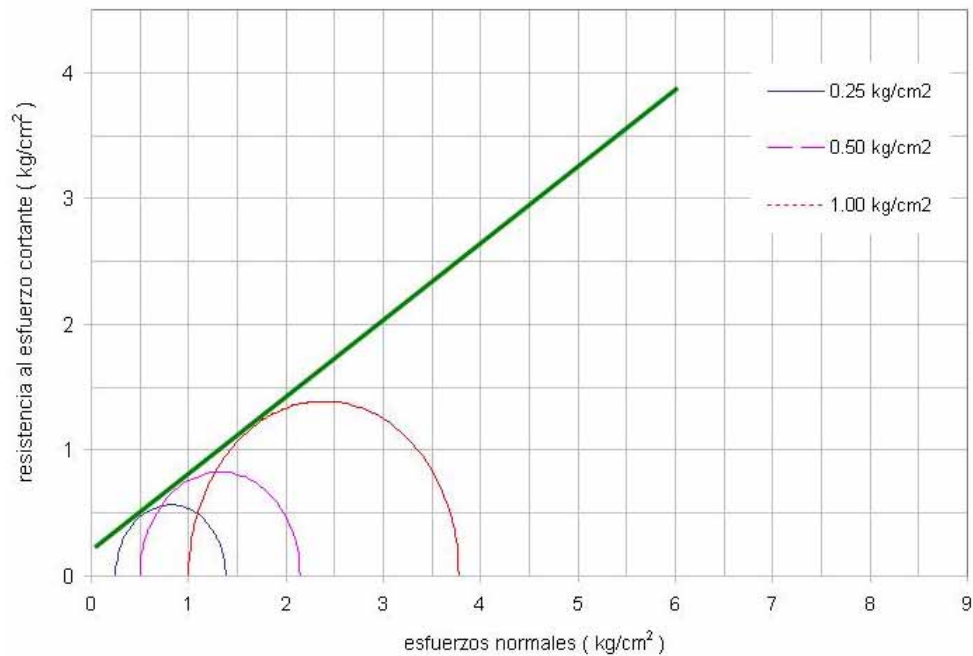


Fig 5.4. Círculos de Mohr para suelos del tipo limosos



El rango de esfuerzos para medir los parámetros de resistencia está entre  $0.25 \text{ kg/cm}^2$  y  $2 \text{ kg/cm}^2$ , por lo que las gráficas para visualizar la relación entre la razón “ $V_p/V_s$ ”, ángulo de fricción interna, y la Relación de Poisson están limitadas al rango elástico.

Los suelos y materiales geológicos donde se realizaron las evaluaciones de los parámetros de resistencia y las velocidades de propagación de las ondas elásticas son del tipo colapsable, expansivo e inerte (fig 5.5).

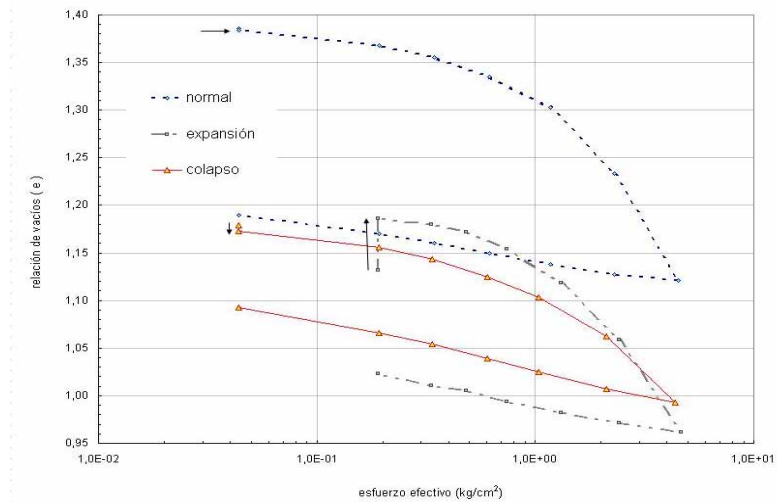


Fig 5.5. Variación de la relación de vacíos en suelos colapsables, expansivos e inertes

Cabe hacer notar que el material inerte presenta una relación de vacíos muy alta (fig 5.5), mientras que el colapsable en “contra natura”, una relación de vacíos baja y expansión intermedia. Respecto a la profundidad se establece que conforme esta crece, la relación de vacíos disminuye considerablemente; inclusive, el comportamiento a profundidades (mayor presión de confinamiento), se puede considerar del tipo elástico (fig 5.6).

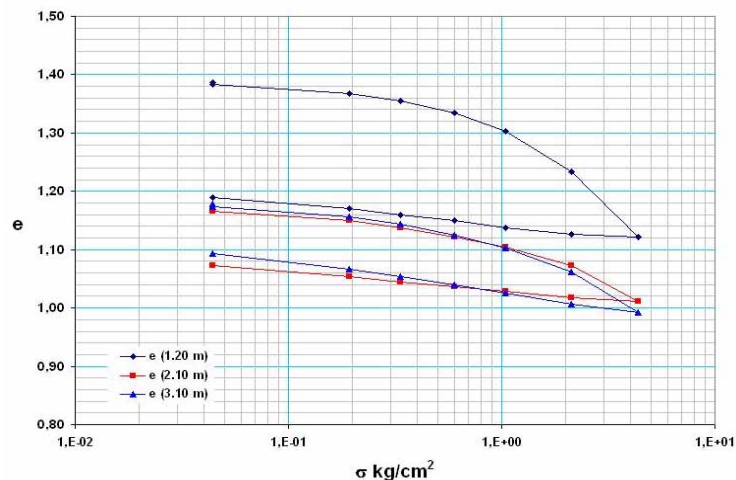


Fig 5.6. Variación de la relación de vacíos a profundidad

Pestana, ., (2002) encontró una relación entre el módulo de Rigidez Dinámico y la relación de vacíos ( e ) de materiales granulares como son gravas y arenas, tal y como aparece en la fig 5.5.

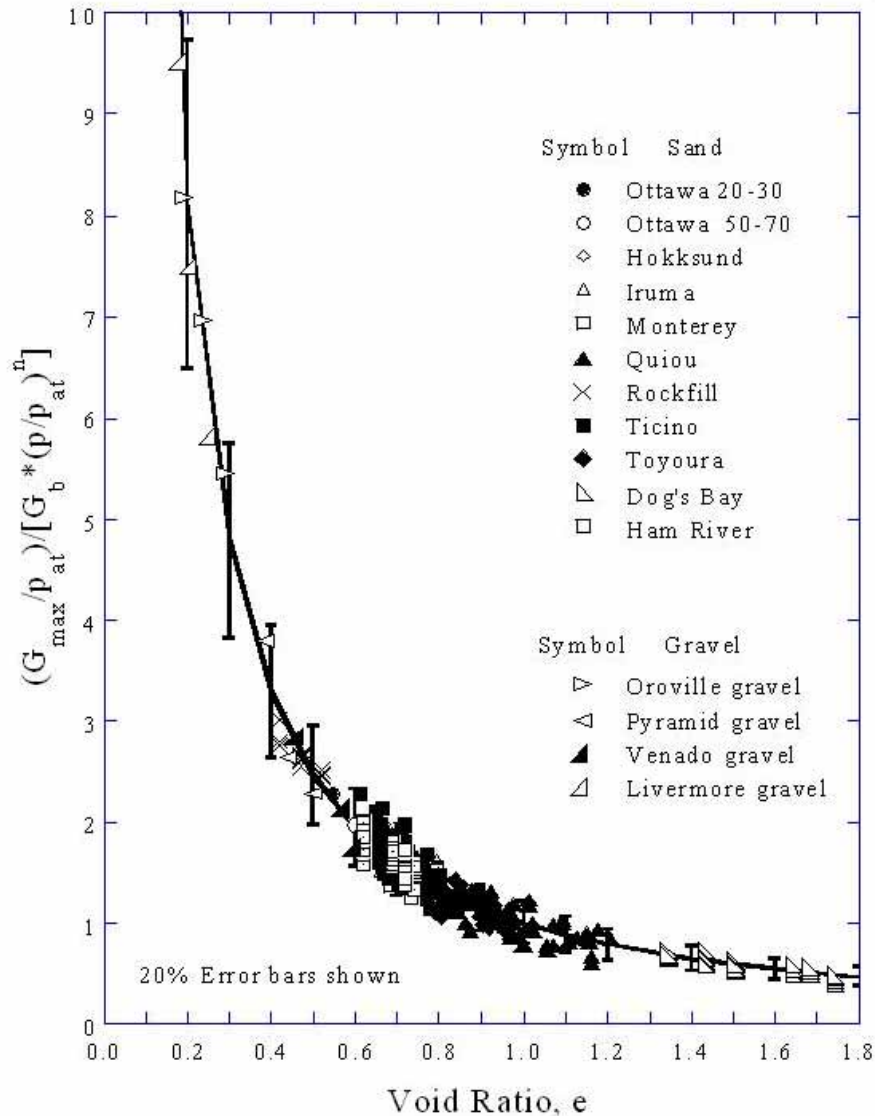


Fig 5.5. Asociación entre la relación de vacíos y el Módulo de Rigidez Dinámico, según Pestana J., (2002)

De la figura es comprensible que a menor relación de vacíos el Módulo de Rigidez Dinámico es mayor.

La gráfica es muy similar a la encontrada por Alvarez Manilla A A. (2003) en este trabajo donde se establece la relación entre la “Vp/Vs” y el ángulo de fricción interna “ φ ” para suelos del tipo “MH” del valle de Querétaro (fig 5.6). Se interpreta que cuando la magnitud de la onda “Vs” está más cerca de la “Vp” el material es más rígido; por tanto, el ángulo de reposo o de fricción interna es mayor.

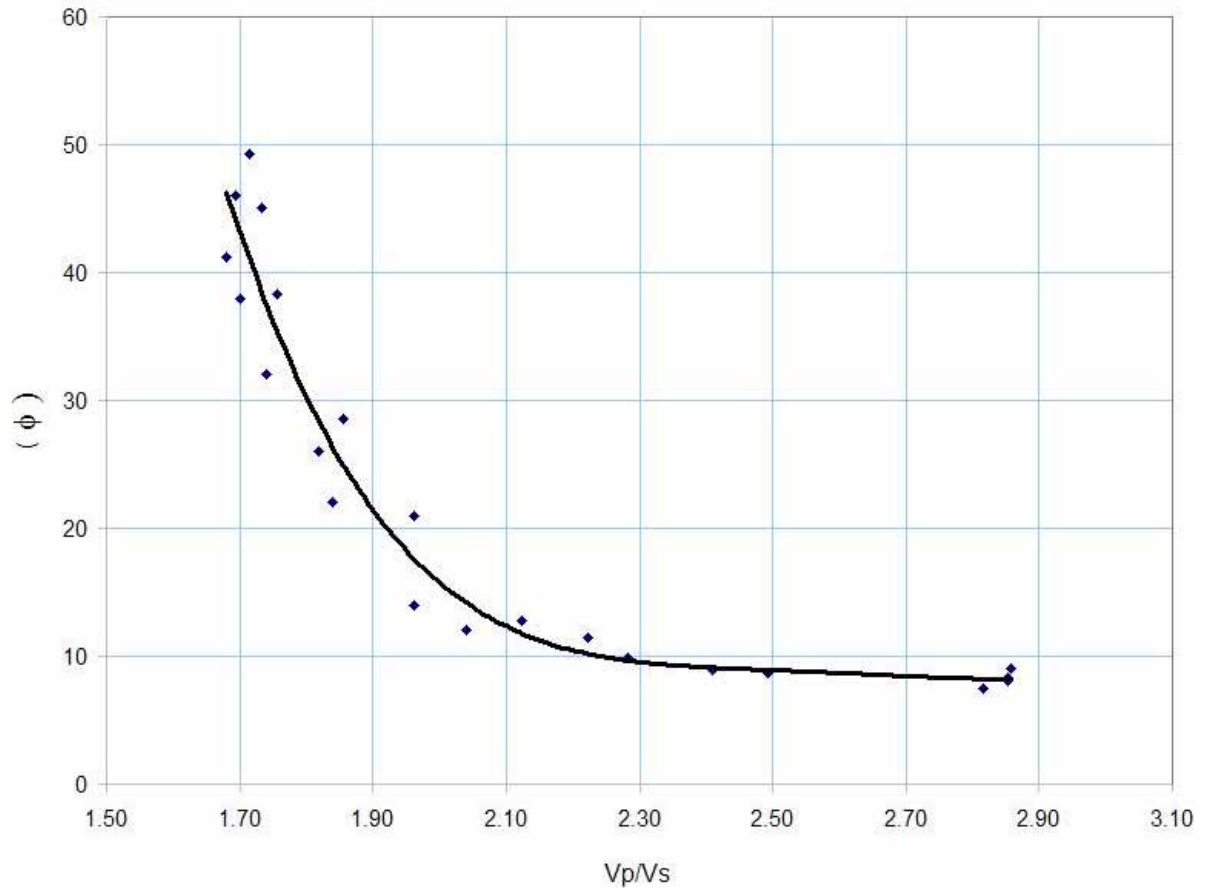


Fig 5.6. Relación entre la razón “Vp/Vs” y el ángulo de fricción interna, suelos “MH y tobas, según Alvarez Manilla A A., (2003)”

También se formó otra gráfica donde se correlaciona a la razón la “Vp/Vs” con la Relación de Poisson ( $\nu$ ) (fig 5.7).

Ésta gráfica resulta con un grado de correlación muy alto, conforme el resultado del ratio “Vp/Vs” se hace más grande, significa que los materiales geológicos corresponden a suelos o tobas blandas; se comenta que la gráfica solamente fue para suelos del tipo “MH”.

La Relación de Poisson indica la maleabilidad de los materiales geológicos a deformarse.

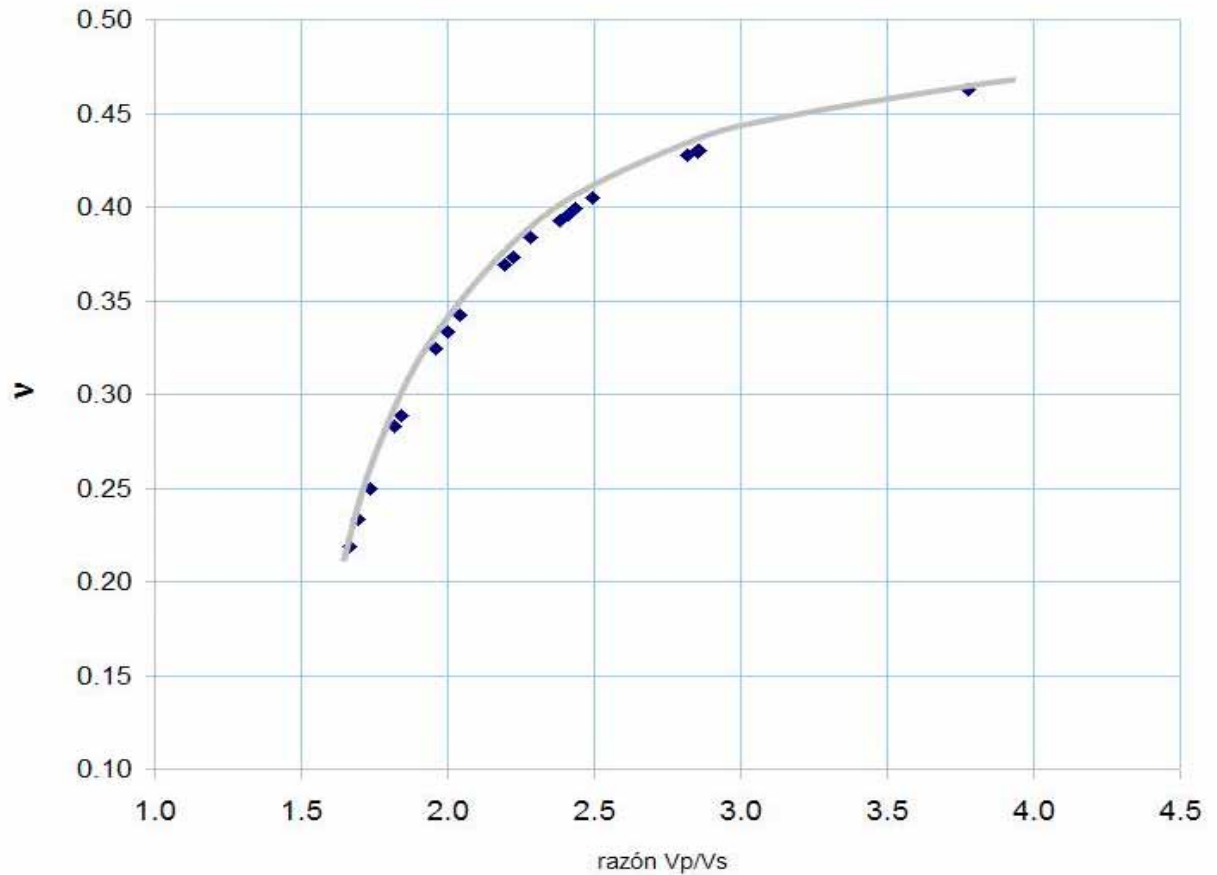


Fig 5.7. Relación entre la razón “Vp/Vs” y la Relación de Poisson y tobas, según Alvarez Manilla A A., (2003)”

Con los datos de las velocidades y estas gráficas, será posible utilizarlas para cálculos de las deformaciones elásticas, y evaluaciones de la estabilidad de laderas y taludes; así como para obtener los datos de los períodos fundamentales de vibración bajo la estructura de un puente, alcantarillas, antenas de comunicación, etc.

---

## Referencias

- Al-Sadi H., (1980). "*Seismic Exploration Technique and Processing*". Birkhäuser Verlag.
- Alvarez Manilla A A., (2002). "*Módulos de Rigidez, in-situ*". ANALISEC. León, Gto.
- Alvarez Manilla A A., (2003). "*Evaluación de los Módulos Elásticos Dinámicos in-situ*". 2nd International Course on Computacional Geotechnics". Santiago de Querétaro, Qro. SMMS.
- Alvarez Manilla A A., (1990-1999). "*Apuntes de Geofísica Aplicada*". Curso Internacional de Geohidrología y Contaminación de Acuíferos. Centro de Educación Continua de la Universidad Nacional Autónoma de México.
- Azizi F., (2000). "*Applied Analisis in Geotechnics*". E & FN SPON.
- Canal de la, J., (1988). "*Diccionario de sinónimos e ideas afines*". SECSA.
- Chinesta F., Olmos F., Poitou A. y Torre R. (1996). "*Mecánica de los medios contínuos*". Universidad Politécnica de Valencia.
- Danbom S. H., and Domenico S. N., 1986., "*Shear-wave exploration*". Geophysical Develompments No. 1. SEG, Tulsa. Oklahoma.
- Howell B. F., 1962. "*Introducción a la Geofísica*". Omega.
- Hunt E. R. (1984). "*Geotechnical engineering investigation manual*". McGraw Hill Book Co.
- Jardetzky W. S., Swing W. M. and Press F. (1957). "*Elastic Waves in Layered Media*". McGraw Hill.
- López L. T. (1995). "*Resistencia al esfuerzo cortante en arcillas expansivas de Jurica, Querétaro*". Tesis de Maestría en Ingeniería. DEPFI de la Universidad Autónoma de Querétaro.
- Middleton G., and Wilcock P., 1994., "*Mechanical in the Earth environmental Sciences*". Cambridge University Press.
- Pestana Nascimento J. (2003). "*Dynamics properties of soils*". 2nd Internacional Course on Computacional Geotechnics". Santiago de Querétaro, Qro. SMMS.
- Poot L. M. R., (1999). "*Modelo constitutivo para suelos no saturados expansivos*". Tesis de Maestría en Ciencias de Ingeniería. DEPFI de la Universidad Autónoma de Querétaro.
- Preciado C. H. F. (1998). "*Estudio de la influencia de las variables de compactación en las características expansivas de un suelo de Jurica, Querétaro*". Tesis de Maestría en Ingeniería. DEPFI de la Universidad Autónoma de Querétaro.
- Secretaria de Desarrollo Urbano, Obras Públicas y Ecología Municipal de Santiago de Querétaro. (1998). "*Mapa de Fallas y Zonas de Riesgos Geotécnico y Geológico del Valle y Zona Metropolitana de Querétaro*". Geo Ingeniería Alfven, SA de CV.

Society of Exploration Geophysicist. (1947). "*Early Geophysical Papers*". SEG, Tulsa, Oklahoma.

Terzaghi K y Peck R. B. (1955). "*Mecánica de Suelos en la Ingeniería Práctica*". Editorial El Ateneo, SA de CV.

Timoshenko S. P. and Goodier J. N. (1970). "*Theory of Elasticity*". McGraw Hill.

Touloukian Y. S. and Ho C. Y. (1981). "*Physical properties of rocks and minerals*". McGraw Hill.

Trejo M. A. (1989). "*Estratigrafía y propiedades mecánicas del subsuelo del Valle de la Zona Urbana de Querétaro*". Universidad Autónoma de Querétaro.

Zeevaert W. L. (1995). "*Esfuerzo-deformación-tiempo en suelos finos no saturados*" Revista de la SMMS, Número 9, Enero-Junio 1995.

Zepeda G. J. A. (1989) "*Expansión y compresibilidad de arcillas parcialmente saturadas*". Curso Internacional de Mecánica de Suelos Arcillosos. Universidad Autónoma de Querétaro (México) y Universidad de Laval (Canadá).

Zepeda G. J. A. (1995) "*Notas del curso de Comportamiento de Suelos I'*" División de Estudios de Postgrado de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro.

**CIUDAD DE MEXICO**

Av. Patriotismo 683  
Col. Mixcoac  
03730, México, D. F.  
Tel (55) 56 15 35 75  
55 98 52 18  
Fax (55) 55 98 64 57

**SANFANDILA**

Km. 12+000, Carretera  
Querétaro-Galindo  
76700, Sanfandila, Qro.  
Tel (442) 2 16 97 77  
2 16 96 46  
Fax (442) 2 16 96 71

Internet: <http://www.imt.mx>  
[publicaciones@imt.mx](mailto:publicaciones@imt.mx)