



*Certificación ISO 9001:2008 ‡*

---

---

# SELECCIÓN DE RUTAS DE DISTRIBUCIÓN MULTIOBJETIVO PARA PRODUCTOS PERECEDEROS EN EL MERCADO DE EXPORTACIÓN

Agustín Bustos Rosales  
Luis E. Herrera del Canto  
Alma Zamora Domínguez

**Publicación Técnica No. 410**  
**Sanfandila, Qro. 2014**



---

**SECRETARÍA DE COMUNICACIONES Y TRANSPORTES**  
**INSTITUTO MEXICANO DEL TRANSPORTE**

**Selección de rutas de distribución multiobjetivo  
para productos perecederos en el mercado de  
exportación**

**Publicación Técnica No. 410**  
**Sanfandila, Qro. 2014**

---



Esta investigación fue realizada en la Coordinación de Integración del Transporte del Instituto Mexicano del Transporte, por el Dr. Agustín Bustos Rosales, el Dr. Luis E. Herrera y la Lic. Alma Zamora Domínguez.

Se agradece la colaboración del Dr. José Elías Jiménez, Investigador titular del Instituto Mexicano del Transporte por los comentarios y observaciones al presente trabajo.

# Contenido

---

Resumen	iv	
Abstract	vi	
Resumen ejecutivo	viii	
Capítulo 1	Desarrollos históricos de redes multiobjetivo	13
1.1	Métodos de optimización multiobjetivo	13
1.2	Método $\epsilon$ -restricción	13
1.3	Problema de ruta más corta multiobjetivo (MSPP)	19
1.4	Desarrollo de problemas de transporte con problemas de flujo a costo mínimo	21
Capítulo 2	Modelo multiobjetivo de ruta más corta	25
2.1	Modelo multiobjetivo MCF	25
Capítulo 3	Experimentación y análisis	27
3.1	Ejemplo de aplicación del modelo $\epsilon$ -restricción en un problema de transporte	27
3.2	Corrida en GAMS del modelo $\epsilon$ -restricción	31
3.3	Aplicación a un ejemplo de flujo a costo mínimo con dos objetivos	32
Capítulo 4	Problema de aplicación	35
4.1	Problema de transporte de perecederos	35
4.2	Atributos del servicio de transporte	38

---

4.3 Resultados	40
Capítulo 5 Conclusiones	41
Bibliografía	45
Anexo 1	53

# Resumen

---

Una planeación eficaz de una red de transporte influye en las actividades tácticas y operativas y tiene un gran impacto en los negocios. Dicha planeación típicamente considera múltiples aspectos como los costos variables de transporte, los distintos niveles de atención al cliente que ofrece, la seguridad de los bienes y el tiempo de viaje. Aunque el problema de flujo de costo mínimo es un enfoque ampliamente visto para configurar una red de transporte, no hay mucho trabajo teniendo en cuenta varios atributos en los arcos, aún más, el problema con los nodos apenas se ha abordado. En este trabajo se desarrolla un modelo matemático para el problema de flujo a costo mínimo multiobjetivo. En el modelo se encuentra el conjunto de soluciones no dominadas por una red multiobjetivo que distintos atributos en sus arcos y nodos, como el costo o el tiempo de transporte.

Este trabajo presenta las principales características del modelo, las bases teóricas y una implementación computacional. Los experimentos fueron aplicados en una red de transporte para el mercado de exportación de flores ornamentales como son los productos perecederos desde México a los Estados Unidos.

Palabras clave: optimización multiobjetivo; flujo a costo mínimo; mercancías perecederas.



# Abstract

---

Effective planning of a transportation network influences tactical and operational activities and has a great impact on business. Planning typically considers multiple aspects such as variable transportation costs, various levels of customer service offered, security of goods and traveling time. Although the minimum cost flow problem is a widely seen approach to configure a transportation network, there is no much work considering multiple attributes on arcs; even more, the problem with nodes has hardly been addressed. In this work is developed a mathematical model for the multiobjective minimum cost flow problem. The model finds the set of non-dominated solutions for a multiobjective network having attributes of its arcs and nodes, such as cost or transportation time.

This work presents the main features of the model, the theoretical bases and a computational implementation. Experiments were applied in a transport network for the exportation market of ornamental flowers as perishable goods from Mexico to the United States.

Keywords: multiobjective optimization; minimum cost flow; perishable goods



## Resumen ejecutivo

---

De acuerdo con el Observatorio Estratégico Tecnológico del Tecnológico de Monterrey en México, el Estado de México ha mostrado tasas de crecimiento inferiores a la media nacional en los últimos años, a pesar de ello, el sector agropecuario mostró un crecimiento promedio anual de 3,1% para 2011. En el sector agrícola, la oportunidad está en la plantación de flores ornamentales. La plantación de crisantemo, rosa y clavel en el sur y el este del estado representan el 19,33% del valor total de la producción usando sólo el 0,38% de la superficie sembrada.

Si bien es reconocido a nivel mundial que la calidad de la flor mexicana es excelente, el principal desafío para todos los actores involucrados en la industria de la floricultura es llevarlos a las casas, y promover el consumo como un hábito frecuente

La proximidad de México a los Estados Unidos, el principal comprador de flores fuera de México, le da al país una ventaja competitiva en este mercado en relación a competidores como Colombia y Ecuador, lo que permite mejorar los tiempos de viaje para el transporte de camiones y los ahorros de costos resultantes en comparación con el modo aéreo, condición que sólo puede ser utilizado por los productores mexicanos.

A pesar de su contribución al diseño de la red de transporte, el problema de flujo a costo mínimo (MCF) está lejos de adaptarse a las necesidades de transporte que las empresas pudieran tener, qué rutas o proveedores seleccionar a partir de diferentes objetivos, no sólo de elegir el menor costo o el menor tiempo por separado. En diversas aplicaciones en problemas reales de selección de ruta se consideran otros objetivos, por lo que la identificación de una solución única que supere a las demás con respecto a todos los objetivos es a menudo imposible, en lugar de una única solución se busca un conjunto de soluciones óptimas de Pareto. Este problema se conoce como multiobjetivo de flujo a costo mínimo (MMCF).

En cuanto al MMCF, se ha encontrado que la mayoría de los enfoques son de interés teórico. También se encontró que, aunque para MMCF en redes continuas, los algoritmos aproximados para encontrar un conjunto representativo de todos los flujos eficientes generan resultados de buena calidad, el enfoque apropiado para el caso de redes con atributos numéricos enteros (MMCIF) apenas ha sido abordado por la literatura actual (Bustos et al., 2014).

El tipo de problema a resolver se refiere a la determinación de una curva eficiente que ofrezca diversas rutas apropiadas a la optimización de los objetivos de interés

para la distribución de productos perecederos en redes con restricciones en capacidad.

En este trabajo se propuso poner a prueba este modelo en el Comercio Internacional EE.UU. - México de productos perecederos, en un problema particular de exportación de una región de México a destinos en los EE.UU. Este es un problema de flujo a costo mínimo multiobjetivo, que se aplica al caso del mercado de exportación de flores que tiene su origen en el Estado de México y Puebla, con la identificación de posibles destinos diferentes en los EE.UU. Se trata de encontrar los flujos de mercancías que permiten reducir costos en términos monetarios y de tiempo.

Se desarrolló un modelo para tratar con el problema de flujo a costo mínimo multiobjetivo. Finalmente, se analizó el trabajo realizado, explicando la instancia de la aplicación y las características del programa desarrollado para su solución. El modelo es el siguiente:

- $i$  Conjunto de índices de nodo origen de arco,  $i \in V$
- $j$  Conjunto de índices de nodo destino de arco,  $j \in V$
- $c_{ij}^r$  Costo relativo a usar el arco que va de  $i$  a  $j$  de acuerdo con el criterio  $r$ ,  $r=1,2,\dots,r$ ,  $(i,j) \in A$
- $x_{ij}$  Variable de decisión. Flujo del nodo  $i$  al nodo  $j$ ,  $i,j \in N$
- $b_i$  Capacidad/ demanda del nodo  $i$ ,  $i \in N$

$$\min \sum_{\{j:(i,j) \in A\}} C_{ij}^r x_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{\{j:(i,j) \in A\}} x_{ij} - \sum_{\{j:(i,j) \in A\}} x_{ji} = b_i \text{ para todo } i \in N,$$

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij} \text{ para todo } i \in A$$

Existe una gran variedad de métodos disponibles para resolver los problemas Multiobjetivo (MOO), muchos de ellos implican convertir el problema MOO en una o una serie de problemas de un solo objetivo o SOO (Deb, 2011, Talbi, 2009, Marler, 2004, Rangahia, 2008). Cada uno de estos problemas consiste en la optimización de una función de escalamiento, que es una función de los objetivos iniciales, por un método adecuado para SOO.

## Método $\varepsilon$ -restricción

El transporte de perecederos en el ámbito internacional se caracteriza por una gran **cantidad de proveedores** de servicio de transporte, lo cual genera una mayor cantidad de opciones de rutas a elegir, el número de rutas crece a razón de

$$O \times p \times v \times c_d \times c_f \times t_f \times D$$

Donde:

O es el número de orígenes

p el número de proveedores

v tipos de vehículo usado por proveedor

$c_d$  número de centros de distribución

$c_f$  número de cruces fronterizos

$t_f$  número de modalidades para el cruce fronterizo

D número de destinos

Dada la gran cantidad de opciones que se podrían generar conforme crece el problema, se descarta el uso de métodos exactos.

Se desconoce el nivel de importancia que cada usuario del servicio de transporte pudiera darle a cada uno de los atributos del nivel de servicio de transporte, por lo que no se recomienda usar métodos de preferencia a priori ni métodos secuenciales o en paralelo, lo que deja como opciones para tratar el problema las de escalamiento y de preferencia a posteriori.

Dentro de los métodos de escalamiento a posteriori, se eligió el uso del método  $\varepsilon$ -restricción, ya que, a diferencia del método de sumas ponderadas, puede generar todas las soluciones de la frontera Pareto.

Un problema lineal multiobjetivo (MOLP - multi objective linear problem) viene dado por

$$\begin{aligned} & \text{Min } Cx \\ & \text{s.a. } x \in X \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $C = (c_1, \dots, c_p)$  cuyos renglones  $C_1, \dots, C_p$  denotan una matriz lineal  $p \times m$

En los problemas MOLP se asumen objetivos contradictorios, lo que excluye la existencia de una solución ideal  $x \in X$  que minimice todos los objetivos  $p$  simultáneamente. Una solución  $y' \in Y$  es no dominada si no existe otra solución  $y \in Y$  tal que  $y$  mejor que  $y'$  and  $y \neq y'$ .

Existe una variedad de métodos disponibles para resolver problemas multiobjetivo; muchos de ellos implican la conversión de estos en uno o una serie de problemas de un solo objetivo.

Se propone método  $\varepsilon$ -restricción para resolver el problema MMCF porque, dentro de los métodos de escala es la más adecuada para los problemas de programación entera mixta y garantiza obtener todos los puntos de la frontera de Pareto (como un trade-off con el tiempo de ejecución).

El método  $\varepsilon$ -restricción se basa en una escalada donde una de las funciones objetivo está limitada por restricciones adicionales:

$$\begin{aligned} & \text{Min } f_k(x) \\ & \text{s. a.} \\ & f_i(x) \leq \varepsilon_i, \quad i \neq k \\ & x \in X \end{aligned} \tag{2}$$

Donde  $\varepsilon_k = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{k-1}, \varepsilon_{k+1}, \varepsilon_p)^T \in \mathbb{R}^{p-1}$  and  $k \in \{1, \dots, p\}$

El conjunto factible del problema está dado por:

$$X_k^\varepsilon := \{x \in X : f_i(x) \leq \varepsilon_i, \quad i \neq k\}$$

Método  $\varepsilon$ -restricción funciona predefiniendo una cuadrícula virtual en el espacio objetivo y resolviendo diferentes problemas de objetivos individuales restringidos en cada cuadrícula. Todas las soluciones óptimas de Pareto se pueden encontrar sólo si la rejilla es lo suficientemente fina para que a lo sumo una solución óptima de Pareto se encuentre en cada celda. Por lo tanto, para un problema general, la elección del parámetro de tamaño de la rejilla, influencia el tiempo de ejecución del algoritmo.

Los pasos a seguir en el método  $\varepsilon$ -restricción son:

- Colocar  $k_1(k)$  como el primer objetivo a considerar,  $k_{m1}(k)$  los demás objetivos.
- Colocar  $k_k(k)$  a la función objetivo como restricción en una sola expresión, esto se hace con las funciones objetivo diferentes a  $k_1(k)$ .
- Optimizar el primer objetivo y los otros se ponen como restricciones. El segundo término es para evitar puntos débilmente eficientes:

$$\text{augm\_obj} = \text{sum}(k_1, \text{dir}(k_1) * z(k_1)) + 1e-3 * \text{sum}(k_{m1}, \text{sl}(k_{m1}) / (\text{maxobj}(k_{m1}) - \text{minobj}(k_{m1}))) = a\_objval;$$

- Generar la tabla de ganancias con optimización lexicográfica.
- Liberar los valores fijos de las funciones objetivo para una nueva iteración.
- Definir diferentes intervalos de red para diferentes objetivos.
- Caminar por los puntos de la malla y tomar atajos, si el modelo se vuelve factible.
- Seguir adelante en la red.
- Obtener soluciones únicas del archivo de puntos.

## Modelos

Para hacer frente a un problema de flujo a costo mínimo, el modelo propuesto para trabajar con problemas de flujo a costo multiobjetivo se basa en los modelos clásicos MMCF:

$i$	Conjunto de índices de nodo origen de arco, $i \in V$
$j$	Conjunto de índices de nodo destino de arco, $j \in V$
$c_{ij}^r$	Costo relativo a usar el arco que va de $i$ a $j$ de acuerdo con el criterio $r$ , $r=1,2,\dots,r$ , $(i,j) \in A$
$x_{ij}$	Variable de decisión. Flujo del nodo $i$ al nodo $j$ , $i,j \in N$
$b_i$	Capacidad/ demanda del nodo $i$ , $i \in N$

$$\min \sum_{\{j:(i,j) \in A\}} C_{ij}^r x_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{\{j:(i,j) \in A\}} x_{ij} - \sum_{\{j:(i,j) \in A\}} x_{ji} = b_i \text{ para todo } i \in N,$$

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij} \text{ para todo } i \in A$$

## Aplicación

El problema se ejemplifica con un distribuidor de flores ubicados en el Tenango, Estado de México y en Tecamachalco, Puebla. Su principal cliente se encuentra en Chicago, Illinois, por lo que el transporte de flores es de gran importancia. Como se ve en la Figura 4.1.

El objetivo es llevar flores sobre una base semanal, por lo que está buscando para elegir la mejor ruta. Para ilustrar el proceso se consideraron tres empresas de transporte en el lado mexicano, que pueden utilizar dos tipos diferentes de unidades de transporte:

proveedor descripción del vehículo

- A C2 Rabon
- B C2 Rabon
- C T3S2 remolque de 53'

Cada ruta se caracteriza por la empresa transportista, el tipo de vehículo utilizado por el operador, el centro de trasbordo (o si es un viaje directo a la frontera) y el paso fronterizo utilizado. Esta instancia considera sólo un proveedor de servicios de transporte en los Estados Unidos.

A su vez, se puede utilizar cuatro centros de transferencia que se encuentran en Querétaro, San Luis Potosí, Aguascalientes y Zacatecas, y cuatro cruces fronterizos: Colombia en Nuevo León, y Nuevo Laredo, Reynosa y Matamoros en Tamaulipas.

En cada cruce fronterizo existe la opción de contratar a un transportista para cruzar la mercancía de un lado a otro de la frontera (transfer), o hacerlo directamente por un vehículo mexicano o estadounidense que tiene los permisos necesarios para cruzar la frontera.

Dentro de las iniciativas bilaterales desarrolladas para asegurar el flujo seguro y eficiente de los bienes es el de los carriles FAST / Express, aplicables a las



empresas mexicanas que han sido certificados en la Asociación Aduanera y Comercial contra el programa Terrorismo (C-TPAT). Esto tiene como objetivo reducir los tiempos de espera en la frontera común de crear un flujo más ágil de los vehículos en ambas direcciones.

La Figura 1 resume las actividades llevadas a cabo en la frontera entre México y los EE.UU. y muestran la caracterización de un paso de frontera. Donde un mismo cruce fronterizo (formado por el recuadro punteado) está formado por nodos A, B, C del lado mexicano y 1, 2 del estadounidense. De un origen  $O_i$  pueden viajar los vehículos directamente a la frontera mexicana o por medio de un centro de distribución  $c$ . Los arcos que llegan a los nodos A y B representan a dos vehículos C2 distintos mientras que a C llega el T3S2. El arco A-1 representa el cruce por medio de servicio de “transfer”, mientras que en C-1 se realiza por T3S2 y C-2 por T3S2 usando el carril “Fast”:

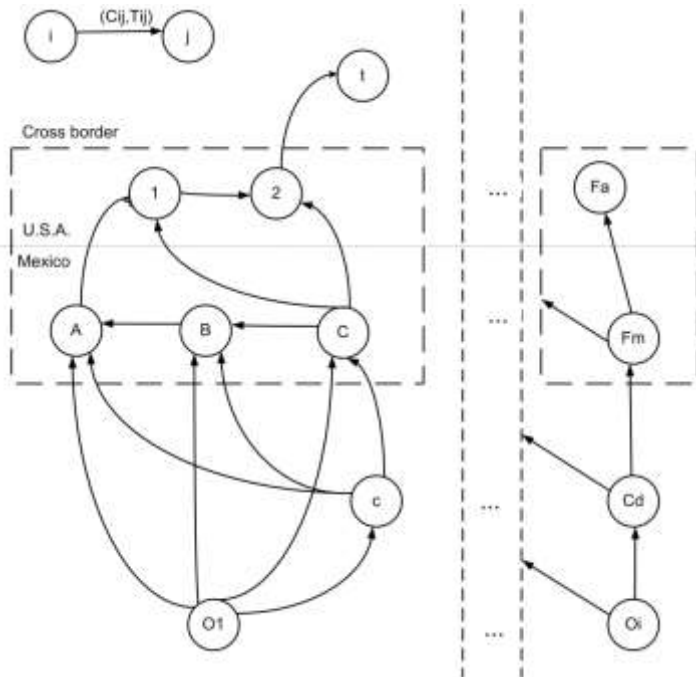


Figura 1. Proceso simplificado de cruce fronterizo

Los atributos de transporte considerados en el trabajo son los siguientes:

**Costo.** Se refiere a la cantidad de recursos consumidos para la realización del transporte dada su eficiencia, como la generación de riqueza y los ingresos por transporte de mercancías y personas.

Para el caso de productos perecederos, dado que éstos tienen un tiempo de vida limitada, se establece un tiempo de vida mínimo remanente en anaquel. Para que se pueda cumplir con el tiempo de vida en anaquel, el tiempo de transporte no debe exceder de un valor  $t_{an}$ , ya que cada unidad de tiempo que se exceda en el transporte representará un deterioro en el estado de la mercancía. El deterioro en la mercancía se puede considerar como un aumento en el **costo total de transporte**, de tal manera que el costo total de transporte estaría representado como sigue:

$$\sum_{(i,j) \in P} C_{ij} X_{ij} + \sum_{(i,j) \in P} D_{ij} X_{ij}$$

Donde:

$C_{ij}$  es el precio de servicio de transporte en que se incurre al cruzar un arco dentro de la red.

$D_{ij}$  es el costo por deterioro de la mercancía debido al tiempo de transporte excedente a  $t_{an}$ .

$$\sum_{j \in V} t_{ij} \leq t_{an}$$

Uno de los objetivos a considerar es minimizar el tiempo total de transporte desde los orígenes hasta los destinos finales. Para esto, los datos de tiempo para los arcos se consideran determinísticos,

Para el atributo de tiempo de recorrido, la ecuación correspondiente al objetivo de tiempo quedaría modificada como sigue:

$$\sum_{(i,j) \in P} E[t_{ij}]X_{ij} + \sum_{(q,i,j) \in P} P(q)[t_{qij}]X_{qij}$$

Donde:

$E[t_{ij}]X_{ij}$  Es el valor esperado (considerado como determinístico) del tiempo de cruzar un arco dentro de la red

### Aplicación

Se realizó una consulta de tiempos de cruce el 5 de julio 2010, de 9 a 22 horas en el sitio web del Departamento de Seguridad Nacional (DHS). Se observó que se dan mayores retrasos en las filas en las aduanas en Laredo y Laredo-Colombia, sin embargo, esto puede verse afectado por factores climáticos que han afectado el tráfico en la carretera Nuevo Laredo, México en esa época.

Se forma una red de 29 nodos y 158 arcos, de los cuales 12 –que representan los cruces fronterizos– pueden tomar tres estados de tiempo: bajo, medio, alto.

Con esto se generan las opciones de tiempo y costo que posteriormente alimentan el método de  $\varepsilon$ -restricción. La implementación correspondiente se puede observar en el Apéndice B.

## **Conclusión**

Se ha demostrado que el método  $\varepsilon$ -restricción puede utilizarse de manera eficiente para encontrar el problema de Pareto multiobjetivo exacta.

El enfoque desarrollado por SMMCF es generalizable a los problemas con las siguientes características:

- Los productos perecederos, en los que el tiempo de transporte tiene un impacto significativo.
- Mercados con múltiples orígenes y destinos.
- Selección de rutas basada en los proveedores con capacidades diferentes, los costos y los servicios de tiempo, dependiendo de las características de su flota.

# Introducción

---

La multiplicidad de climas de México permite el desarrollo de una variedad de flores. De acuerdo con datos del Consejo Mexicano de la Flor, el país cuenta con cerca de 23 mil hectáreas de cultivos ornamentales, de los cuales aproximadamente el 48% se destina a la producción de corte y follaje, y el 43% para la industria cosmética y de alimentos.

El Observatorio Estratégico Tecnológico del ITESM, por su parte, identifica los clusters más prometedores para impulsar su desarrollo. Para el Estado de México en el sector agropecuario, en 2004 el sector agrícola mexiquense representaba 4 853 833 miles de pesos (precios de 1993), lo que equivale a 3% del PIB estatal total de ese año y al 5.33% del PIB agropecuario nacional.

En el sector agrícola del Estado de México, el maíz constituye el 60% de la superficie sembrada y aporta el 26.12% de la producción. Una oportunidad se encuentra en la siembra de flores de ornato. La siembra de crisantemo, rosa y clavel en el sur y oriente del estado constituye el 19.33% del valor total de la producción usando solo el 0.38% de la superficie sembrada (Figura 1.1).

De acuerdo con el Observatorio, como entidad, el Estado de México ha mostrado índices de crecimiento inferiores al promedio nacional en los últimos años, aún así, el sector agropecuario presentó un crecimiento promedio anual hasta 2004 de 4.87%, esta tasa es mayor a la que se presentó para ese mismo período en ramas como la industria manufacturera (2.4%) o la construcción (-2.02%). A partir de 2004, el sector agrario mantuvo una tasa de crecimiento medio anual de 3.1% como se aprecia en la Figura 1.2.

Aunque a nivel mundial se reconoce que la calidad de la flor mexicana es excelente, el principal desafío para todos los actores involucrados en la industria de la floricultura es para llevarlos a los hogares, y promover el hábito de consumo como un hábito frecuente.

La proximidad de México a los Estados Unidos, el principal comprador de flores de México en el exterior, le da al país una ventaja competitiva en este mercado en relación con sus competidores como Colombia y Ecuador, para permitir mejores tiempos de viaje por el transporte motorizado y el consiguiente ahorro de costos en comparación con el modo aéreo, condición que sólo puede ser utilizado por los productores nacionales (Martner et al. 2005, Morales y de la Torre, 2006).

En este sentido, según datos del Consejo Mexicano de la flor, en el Estado de México se cuenta con 5 547 hectáreas de plantación, donde están creciendo un 80% del valor de la producción nacional de flores ornamentales.

La demanda para el comercio exterior, que se genera principalmente en el mercado estadounidense, es atendida principalmente por productores mexiquenses que utilizan servicios de transporte refrigerado. Éste ha resultado ser el modo más utilizado para las exportaciones de flores a Estados Unidos a la hora de considerar el costo y la posibilidad de un mejor control de temperatura.

La ausencia o la falta de promoción de los servicios ferroviarios de refrigeración entre el productor y los centros de consumo, tanto en México como en Estados Unidos, hacen que la vía férrea no sea una manera efectiva para el transporte de flores de México.

Sin embargo, se habla de los servicios ferroviarios entre México y Chicago Ill. que ofrecen mejores tiempos que el transporte por carretera, tales servicios se centraron al movimiento de piezas automotrices y se hacen en contenedores. En esta relación, se han encontrado el éxito en el uso de contenedores refrigerados. Para las flores movidas en viajes marítimos de contenedores que duran 11 a 13 días, la vida en florero es comparable a los envíos aéreos, con una duración entre 10 y 18 horas.

En cuanto al modo de transporte utilizado por los preparadores para enviar cargamentos de flores de exportación a los Estados Unidos, generalmente se hace por tierra, con agua y clima controlado. Debido a su alto costo, la aerolínea ha perdido competitividad a pesar de tener un tiempo de transferencia mucho menor.

Por ejemplo, una comparación de la velocidad de envío de flores desde México a Chicago, entre el avión y camiones, el costo del transporte aéreo es de tres a cuatro veces mayor que si se usara el transporte carretero. Por otra parte, dado que las líneas de mensajería o paquetería aún no han implementado servicios de refrigeración por aire, los envíos están sujetos a las variaciones y a altas temperaturas, que reducen la vida de la flor.

Además, el tiempo de viaje por carretera también es muy favorable, ya que se realiza en un período de 60 a 80 horas, en tres días en promedio. Así, con un buen empaquetado y control de temperatura durante el transporte, el envío de flores movidas por tierra tiene un tiempo de vida restante en aparador que sigue siendo muy competitivo.

En cuanto a la importancia del factor de costo de transporte, existe dificultad para su determinación, dada la diversidad de requerimientos emanados de la variedad de la producción. Por ejemplo, la influencia del costo de transporte en el costo de venta del producto, depende ocasionalmente del peso de la variedad de flor. Hay

flores que pesan mucho y tienen un precio de venta muy barato; mientras que hay otras que son muy finas y ligeras, pero que tienen un alto costo de venta.

Morales y de la Torre (2006) mencionan el caso de la gladiola, que para ser exportada debe contar con permisos fitosanitarios especiales, lo que implica trámites extraordinarios que demandan recursos adicionales, que estrictamente también deberían formar parte del costo logístico.

Ciertos productores consideran que el monto del empaque y transporte está alrededor de 10% del precio de venta. Contradictoriamente, reconocen que este porcentaje puede sacar a su producto de competencia en los mercados internacionales. Como referencia, el costo promedio de un embarque de flores puede fluctuar entre los 30 y 80 mil dólares.

Esta participación del costo de transporte en el precio final de venta puede sacar al productor mexicano del mercado. Situación que se acentúa en otro tipo de productos perecederos como pudieran ser frutas o verduras. Para el caso específico de la piña, Martner et al. (2005) encuentra que, dependiendo de la variedad de piña, los costos logísticos pueden variar de entre 34% y 65% del valor total del embarque, de donde entre 22% y 46% corresponden al rubro de transporte. La Tabla 1.1 muestra el ejemplo de participación del transporte para la exportación de piña denominada MD2.

Como puede observarse, los atributos de costo y tiempo de transporte son de vital importancia para la comercialización de productos perecederos.

La explosión del comercio entre E.E.U.U. y México en las últimas dos décadas han tenido un impacto significativo en el volumen de vehículos que cruzan la frontera. Desde mediados de los ochentas, el tráfico de vehículos de México a los Estados Unidos ha experimentado un crecimiento de más del 400 por ciento. A pesar de una recesión económica en 2001 que resultó en un descenso por primera vez en el comercio de los EE.UU. - México en más de una década, y a pesar de la crisis económica en la que ambos países se encontraban, se esperaba que la expansión del comercio fuese continua.

En 2001, la Oficina de la Federal Highway Administration (FHWA) para la gestión de las operaciones de carga y, con el apoyo de Texas Transportation Institute (TTI), llevó a cabo una revisión en siete puntos de la frontera que concentran el 60 por ciento del comercio, el transporte por carretera entre las tres naciones del TLCAN (Texas Transportation Institute, 2007). En dicho estudio se encontró que el tiempo necesario para procesar los vehículos comerciales que entran en los Estados Unidos lleva mucho más tiempo que para aquellos que salen, la misma situación se repite en casi todas las aduanas.

En total, el tiempo promedio para los vehículos que entran a Estados Unidos fue de 26,8 minutos, mientras que para los vehículos que salen fue de 14,2 minutos. Sin embargo, los tiempos de atención son mucho mayores en la frontera con

México que en la frontera con Canadá. El promedio de tiempo en la frontera con México fueron 33,8 minutos para los vehículos que entran en los EE.UU. por 17,2 minutos para los vehículos que salen.

De acuerdo con un informe del Departamento de Transporte de Estados Unidos (Bureau of Transportation Statistics, 2004), la relación entre las agencias gubernamentales y numerosos agentes privados es complejo, porque las agencias suelen actuar de forma independiente, creando problemas como la incompatibilidad de horarios entre agentes privados y públicos.

En un estudio en el Colegio de la Frontera Norte (El Colegio de la Frontera Norte, 2007), se encontró que "la congestión y el tiempo de espera para los vehículos en puestos de control implican una pérdida monetaria de tal magnitud que genera un gran impacto económico en la producción, ingresos y empleo en la región fronteriza".

A esta afirmación supone que las ciudades seleccionadas para el estudio, "son sacudidas con un shock negativo de la demanda resultante de la disminución de la demanda final en términos de reducción del flujo de comercio internacional". Por lo tanto, para calcular el impacto económico de la congestión y el tiempo de espera en puestos de control se puede suponer que el shock exógeno o el impacto resulta en la pérdida de 466 234 dólares por día causados por demoras.

## **Naturaleza multiobjetivo de las redes de transporte**

La importancia económica de las redes de transporte se han incrementado conforme las empresas se han visto cada vez más inmersas en procesos de globalización de la producción, en los que los productos ya no son elaborados en una sola entidad, sino que es común encontrar bienes con componentes de varias regiones del mundo (International Transport Federation – ITF web page). La International Transport Federation, afirma que a medida que las corporaciones transnacionales se expanden hasta alcanzar dimensiones globales, les resulta menos rentable encargarse del transporte de sus mercancías. A pesar de la importancia del transporte, muchas empresas suelen ignorarlo durante la planeación y suelen contratar con respecto al precio del flete y no por el costo real que genera el servicio de transporte, ignorando además el efecto que esto produce a la mercancía en el mercado, así como a la cadena de suministro en su conjunto.

Dentro de una red de transporte, la atención se debe enfatizar en el punto de transferencia, que puede incluir las terminales y pasos fronterizos, como un caso especial. En un estudio sobre el problema de la congestión de puertos, Enríquez (1968) mencionó que las demoras en los puertos (también aplicable a otros puntos de transferencia de carga) pueden ser vistas como un problema general de colas, por lo que se recomienda el uso de la aproximación matemática a los problemas.



El modelo básico de transporte considera la atención de la demanda en nodos de destino a partir de capacidades de oferta que se encuentra en nodos de origen, haciendo llegar el flujo a través de arcos de tal manera que el costo total por realizarlo sea el mínimo. Como es de esperarse, a pesar de su aporte en el diseño de redes de transporte, este modelo está lejos de adaptarse a las necesidades de transporte que las empresas pudieran tener, las cuales necesitan seleccionar proveedores y rutas a partir de distintos objetivos, no sólo la elección a partir del menor costo o del menor tiempo por separado.

Dadas las restricciones de capacidad de un arco, una ruta puede no tener capacidad de acomodar todo el flujo por sí sola, por lo que puede ser necesario seleccionar un conjunto de rutas a través de los que se enviaría todo el flujo. Una solución en este contexto, por lo tanto, se compone de un conjunto de rutas y la cantidad correspondiente de flujo para ser enviado a lo largo de cada una de ellas.

Las decisiones que deben abordar los operadores intermodales implican la elección de rutas y servicios dentro de las opciones disponibles en las actuales redes intermodales. Este tipo de decisión es operativa, porque se refiere a la asignación de carga a las rutas y los transportistas. Esta situación se vuelve más compleja cuando se trata de transporte intermodal.

En diversas aplicaciones en problemas reales de selección de rutas suelen considerarse otros objetivos, que pueden ser de igual o mayor importancia. Dado que la identificación de una solución única que sea mejor a las demás con respecto a todos los objetivos es a menudo imposible. En lugar de una solución única se busca un conjunto de soluciones óptimas de Pareto.

Este trabajo de investigación se centra en la construcción de un modelo para encontrar el conjunto de soluciones en problemas en redes de transporte que tienen que ver con la consecución de objetivos múltiples, aplicado a una red de transporte intermodal de comercio internacional de productos perecederos, por lo que el modelo a desarrollar se catalogaría como un Problema Multiobjetivo de Flujo a Costo Mínimo.

Este problema es más completo que el correspondiente de ruta más corta ya que se puede considerar como una generalización, tiene la ventaja de considerar también las capacidades de flujo que se generan en los nodos de origen, la demanda en los nodos de destino, y las capacidades de los arcos de la red.

## **Descripción del problema**

Los modelos de redes de ruta más corta (SPP – shortest path problem), son los más utilizados en los estudios de transporte (Ahuja et al, 1997, Reinhardt y Pisinger, 2009). Estos modelos son apropiados cuando es necesario determinar una ruta entre cualquier par de nodos a un costo mínimo y tienen la ventaja de que existen diferentes algoritmos para una variedad de problemas de optimización combinatoria, este punto de vista ha sido apoyado en Ahuja et al. (1997) y

Bazaraa et al. (2005). Este tipo de problemas sin embargo no comprende adecuaciones tales como: orígenes y destinos múltiples y arcos capacitados.

Los modelos de flujo a costo mínimo (MCF – minimum cost flow), los cuales se pueden considerar como una generalización del SPP, tienen la ventaja de considerar también las capacidades de flujo que se generan en los nodos de origen, la demanda en los nodos de destino y las capacidades de los arcos de la red. Dadas estas ventajas, los MCF son utilizados para enviar el flujo a partir de un conjunto de nodos de suministro, a través de los arcos de una red, a un conjunto de nodos de demanda, a un costo total mínimo, y sin violar los límites inferior y superior sobre los flujos a través de los arcos.

En redes de transporte, como en cualquier otra actividad considerando más de un objetivo, cuando se busca encontrar la mejor solución a un problema en función de distintos objetivos, éstos entran en conflicto frecuentemente, lo que significa que encontrar el óptimo para un objetivo resulta en comprometer uno o más de los objetivos restantes. La optimización multiobjetivo (MOO – multi objective optimization) trata sobre encontrar valores de las variables de decisión que provean de la solución óptima para más de un objetivo. Cuando se emplean modelos de flujo a costo mínimo que buscan encontrar la mejor solución siguiendo más de un objetivo, el tipo de problema a resolver es flujo a costo mínimo multiobjetivo (MMCF – multi objective minimum cost flow).

A continuación se describe la naturaleza de los problemas multiobjetivo, seguida de las características del problema de flujo a costo mínimo para uno y varios objetivos.

## Problema de flujo a costo mínimo (MCF)

Sea una red dirigida  $G = (N, A)$  con un conjunto de nodos  $N$  y de arcos  $A$ . Sea  $n = |N|$  y  $m = |A|$ . Cada arco  $(i, j) \in A$  se asocia con un límite de capacidad inferior no negativo y superior positivo denominado  $l_{ij}$  y  $u_{ij}$ , respectivamente. Se busca el menor costo de enviar el flujo que satisfaga la demanda de nodos de destino  $i_d$ , sujeto a la capacidad de nodos de origen  $i_o$ , con  $i_o, i_d \in N$ :

$$\min \sum_{(i,j) \in A} C_{ij} X_{ij} \quad (1)$$

Sea  $b \in \mathbb{Z}^n$  un vector de demanda (si  $b_i < 0$ ,  $i \in N$ ) y de oferta (si  $b_i > 0$ ,  $i \in N$ ) que satisface  $\sum_{i \in N} b_i = 0$ . Si  $b_i = 0$  para algunos  $i \in N$ , el nodo  $i$  es un nodo de transbordo. Una función de  $x: A \rightarrow \mathbb{R}$  se llama un flujo (red) si satisface las restricciones de conservación de flujo:

$$\sum_{\{j:(i,j)\in A\}} x_{ij} - \sum_{\{j:(i,j)\in A\}} x_{ji} = b_i \text{ para todo } i \in N \quad (2)$$

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij} \text{ para todo } i \in A$$

El conjunto de todos los flujos que satisfacen las restricciones de flujo y capacidad es el flujo de poliedro, denotado como  $P_{\text{Flow}}$ .

En particular, se pueden aplicar resultados ya conocidos como la relación entre los flujos básicos y árboles, el criterio de optimalidad usando ciclos negativos y el resultante algoritmo de cancelación de ciclo, algoritmos de ruta más corta, las trayectorias de aumento y algoritmos de ruta, el procedimiento out-of-kilter, etc.

Se desarrolló un programa en Java para la solución de la ruta más corta, el cual se muestra en el Anexo 1. Este programa se probó con una instancia de 29 nodos y se compararon los resultados obtenidos en una programación en GAMS.

## Problema Multiobjetivo

Un problema lineal multiobjetivo (MOLP – multi objective linear problem) está dado por

$$\min Cx \quad (3)$$

$$\text{donde } C = (c^1, \dots, c^p)^T \text{ con filas } C^1, \dots, C^p \text{ denota una matriz lineal } p \times m,$$

$x \in R^m$  el vector de variables, y  $X$  el conjunto de soluciones factibles. Para MOLPs, este conjunto es un poliedro, es decir,

$$X: = P: = \{x \in R^m: Ax = b, x \geq 0\}$$

donde  $A$  es una matriz de restricción  $n \times m$  y  $b \in R^n$  el vector lado derecho. La siguiente expresión se refiere al espacio objetivo:

$$Y: = CX: = \{y: = Cx \in R^p: x \in X\}.$$

En los MOLP se asumen funciones objetivo contradictorias, es decir, se excluye la existencia de una solución ideal  $x \in X$  que minimiza todos los objetivos  $p$  simultáneamente.

**Definición 1 (relación de dominio).** De acuerdo con Coello, Lamont y Veldhuizen Von (2007) y Eusebio y Figueira (2009) una solución  $y' \in Y$  es no dominada si no hay otra solución  $y \in Y$  tal que  $y \leq y'$  e  $y \neq y'$ .

De acuerdo con la definición 1, una solución eficiente no permite una mejora de la función objetivo, manteniendo los mismos valores en los demás. La mejora de algún criterio sólo se puede conseguir a expensas del deterioro de al menos otro criterio. Estos intercambios entre los criterios pueden ser medidos mediante el cálculo del aumento del objetivo  $f_i$ , por ejemplo, al disminuir en una unidad el objetivo  $f_j$ . En algunas situaciones, tales los trade-offs pueden ser ilimitados.

**Definición 2 (optimalidad de Pareto).** De acuerdo con el concepto de optimalidad de Pareto, el conjunto eficiente o Pareto,  $X_E$ , y el conjunto de Pareto débilmente eficiente o débilmente,  $X_{wE}$ , se definen como

$$X_E = \{x \in X: \text{no existe } \bar{x} \in X: C \bar{x} \leq Cx\}$$
$$X_{wE} = \{x \in X: \text{no existe } \bar{x} \in X: C \bar{x} < Cx\}$$

En la Figura 2 se ejemplifican los vectores objetivo no dominados y los dominados, los cuales se indican con puntos oscuros y claros, respectivamente.

**Definición 3 (eficiencia de Pareto).** Una solución  $x \in X$  es (Pareto) eficiente si y solo si  $\nexists x' \in X$  tal que  $f(x') > f(x)$ .

**Definición 4 (conjunto eficiente).** El conjunto eficiente  $E = \{x \in X: x \text{ es eficiente Pareto en } X\}$

**Definición 5 (frente Pareto).** El frente Pareto  $F = \{f(x): x \in E\}$

Es importante tener en cuenta que para los MOLP sólo existen soluciones eficientes soportadas, mientras que para problemas enteros (MOLIP – multi objective linear integer problem) pueden existir soluciones eficientes no soportadas.

Las soluciones óptimas de Pareto son aquellas dentro del espacio de búsqueda cuyos componentes correspondientes del vector objetivo no pueden mejorarse simultáneamente. Estas soluciones son también conocidos como soluciones no inferior, admisibles o eficientes, con el conjunto completo representado por  $P^*$ . Sus vectores correspondientes se conocen como no dominados.

Se distinguen dos tipos de soluciones eficientes:

- Soluciones eficientes soportadas, son aquellas soluciones eficientes que se pueden obtener como soluciones óptimas en un problema de suma ponderada

$$\text{Min } \lambda_1 z_1(x) + \lambda_2 z_2(x)$$

Para algún  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ . Se denota por  $X_{SE}$ , su imagen no dominada por  $Z_{SN}$ . Los puntos no dominados soportados se encuentran en el límite del casco convexo  $\text{conv}(Z)$  del conjunto factible en el espacio objetivo. Las soluciones eficientes soportadas que definen un punto extremo de  $\text{conv}(Z)$  se denominan soluciones eficientes extremas.

- Las soluciones eficientes restantes en  $X_{NE} := X_E \setminus X_{SE}$  se llaman soluciones eficientes no soportadas. No se pueden obtener como soluciones de un problema de la suma ponderada ya que su imagen se encuentra en el interior de  $\text{conv}(Z)$ . El conjunto de soluciones no dominadas no soportadas se denota por  $Z_{NN}$ .

### Definición 6 (punto ideal y punto nadir).

1. El punto  $y^I = (y^I_1, \dots, y^I_p)$  dado por

$$y^I_k := \min f_k(x) = \min_{y \in Y} y_k$$

Se conoce como el punto ideal del problema de optimización multiobjetivo  $\min (f_1(x), \dots, f_p(x))$ .

2. El punto  $y^N = (y^N_1, \dots, y^N_p)$  dado por

$$y^N_k := \max f_k(x) = \max_{y \in Y} y_k$$

se conoce como el punto nadir del problema de optimización multiobjetivo.

Se tiene  $y^I_k \leq y_k$  y  $y_k \leq y^N_k$  para algún  $y \in Y_N$ . Además  $y^I$  e  $y^N$  son ajustados a límites inferior y superior en el conjunto eficiente. Dado que el punto ideal se encuentra resolviendo  $p$  problemas de optimización, puede ser considerada de cómputo fácil (desde un punto de vista multicriterio). Por otro lado, el cálculo de  $y^N$  implica la optimización sobre el conjunto eficiente, un problema muy difícil. No existe un método eficiente para determinar  $y^N$  para un MOP general conocido.

Debido a la dificultad de encontrar  $y^N$ , se utilizan a menudo heurísticas. Una estimación básica del punto nadir utiliza las tablas de ganancia.

## Problema multiobjetivo de flujo a costo mínimo (MMCF)

El MMCF puede establecerse como el siguiente programa matemático:

$$\min\{(c^1, \dots, c^p)^T x : x \in P_{flow}\}$$

Donde  $c^1, \dots, c^p \in R^m$  son vectores no negativos enteros de costos. Nótese que la función objetivo  $C_x = (c^1, \dots, c^p)^T x$  se compone de  $p$  funciones lineales, mientras que el espacio de decisión sigue siendo el mismo que para el problema del flujo a costo mínimo clásico, (MCF). Para efectos del estudio, el MCF es un caso especial de MMCF (con  $p = 1$ ) y MMCF es un caso especial de MOLP.

## Características del modelo propuesto

El modelo propuesto debe seguir los puntos siguientes:

- Como un modelo de flujo a costo mínimo debe ser capaz de trabajar con varios orígenes y destinos, la selección de rutas se llevará de acuerdo con los atributos de la red como los costos y capacidades en los arcos.
- Se debe trabajar con objetivos múltiples, es decir, cada arco tiene un tipo o más de costos, por lo que se identificarán soluciones no dominadas formando un frente de Pareto donde cada solución es mejor que otra sobre el frente de Pareto en al menos un objetivo.

## - Metodología científica

Para resolver este problema, se plantea el uso del método  $\varepsilon$ -restricción, para lo que inicialmente se debe obtener un programa basado en  $\varepsilon$ -restricción para problemas de flujo a costo mínimo multiobjetivo (MMCF).

## Hipótesis

La naturaleza multiobjetivo de los problemas aplicados de transporte requiere el empleo de modelos MMCF. Como se vio en los puntos 1.2.2 y 1.2.3, un problema multiobjetivo difiere de uno de un objetivo en que este contiene varios objetivos que requieren optimización y en donde usualmente no hay una solución óptima sola, por lo que un tomador de decisiones ahora cuenta con una gama (un conjunto finito) de soluciones de donde debe elegir una solución de acuerdo con su situación y los compromisos que se dan entre los objetivos.

## Objetivos

Los pasos a seguir en esta metodología comienza con un estado de la investigación del arte, donde se identifican las principales novedades y nuevas preguntas en las siguientes áreas:

Revisión del estado del arte

La revisión se establecerá en las áreas de

- problema de ruta más corta (SPP)
- problema de ruta más corta con dos o más objetivos
- problema de flujo a costo mínimo (FCM)
- problema de flujo a costo mínimo con dos o más objetivos (BMCF Y MMCF)

Posteriormente, se incluyen los nuevos desarrollos que se encuentran en los diversos tipos de problemas de red antes mencionados.

## **Desarrollo de un modelo de BMCF**

Con los desarrollos que se encuentran en los problemas de flujo en redes y problemas multiobjetivo, el siguiente paso es desarrollar un modelo matemático que resuelva el problema de flujo a costo mínimo, con más de un objetivo, como podría ser el costo o el tiempo asociado con los arcos de la red. Este modelo debe cumplir con las características de los diferentes tipos de problemas que se plantean en el nuevo modelo.

Para conseguir esto, se tienen los siguientes objetivos específicos:

- Realizar una revisión exhaustiva de la literatura referente al tema MCF, MMCF y BMCF.
- Identificar los modelos relativos a MMCF
- Formulación de un modelo que permita trabajar MMCF

## **Implementación del método de solución**

De acuerdo con los desarrollos encontrados en el estado del arte, se plantea el uso del método  $\varepsilon$ -restricción, para lo que inicialmente se debe obtener un programa basado en  $\varepsilon$ -restricción para problemas de flujo a costo mínimo biobjetivo (BMCF). Para esto se revisarán diversos modelos que se puedan adaptar al modelo  $\varepsilon$ -restricción.





# 1 Desarrollos históricos de redes multiobjetivo

---

## 1.1 Métodos de optimización multiobjetivo

Existe una gran variedad de métodos disponibles para resolver los problemas MOO, muchos de ellos implican convertir el problema MOO en una serie de problemas de un solo objetivo o SOO (Deb, 2011, Talbi, 2009, Marler, 2004, Rangahia, 2008). Cada uno de estos problemas consiste en la optimización de una función de escalamiento, que es una función de los objetivos iniciales, por un método adecuado para SOO.

## 1.2 Método $\varepsilon$ -restricción

El transporte de perecederos en el ámbito internacional se caracteriza por tener una gran cantidad de proveedores de servicio de transporte, lo que se traduce en opciones de rutas a elegir que aumentan exponencialmente. El número de rutas crece a razón de

$$O \times p \times v \times c_d \times c_f \times t_f \times D$$

Donde:

O es el número de orígenes

p el número de proveedores

v tipos de vehículo usado por proveedor

$c_d$  numero de centros de distribución

$c_f$  número de cruces fronterizos

$t_f$  número de modalidades para el cruce fronterizo

D número de destinos

Dada la gran cantidad de opciones que se podrían generar conforme crece el problema, se descarta el uso de métodos exactos.

Se desconoce el nivel de importancia que cada usuario del servicio de transporte pudiera darle a cada uno de los atributos del nivel de servicio de transporte, por lo

que no se recomienda usar métodos de preferencia a priori ni métodos secuenciales o en paralelo, lo que deja como opciones para tratar el problema las de escalamiento y de preferencia a posteriori.

Dentro de los métodos de escalamiento a posteriori, se eligió el uso del método  $\varepsilon$ -restricción, ya que, a diferencia del método de sumas ponderadas, puede generar todas las soluciones de la frontera Pareto. La selección del método  $\varepsilon$ -restricción sobre el de sumas ponderadas se sustenta en los siguientes teoremas:

**Teorema 1.1. (Deb, 2009)** El método de sumas ponderadas no puede encontrar soluciones en espacios no convexos.

Prueba

Sea  $f_1$  y  $f_2$  los objetivos a minimizar

$$F = w_1 f_1 + w_2 f_2$$

El método de sumas ponderadas requiere encontrar la matriz hessiana para encontrar los puntos mínimos

$\partial F / \partial x_1 = 0$  genera  $x_1^*$ ,  $\partial F / \partial x_2 = 0$  genera  $x_2^*$ , ambos puntos son mínimos si la matriz hessiana  $\geq 0$

Si  $x_1^* = a$  y  $x_2^* = b$  son mínimos locales y definen una región no convexa

$\exists c = (x'_1, x'_2): a$  no domina a  $c$  y  $b$  no domina a  $c \therefore a, b, c \in PF$

y  $\nexists \frac{\partial F}{\partial x_i}$  que genere  $c$   $\square$

**Teorema 1.2.** La solución única del problema  $\varepsilon$ -restricción es óptima de Pareto para un vector dado  $\varepsilon$

Prueba

En Miettinen (1999) se asume que la solución no es óptima de Pareto y se muestra que ese supuesto viola la definición de optimalidad de Pareto.

Suponiendo  $X'$  no es óptima de Pareto

Sea la siguiente expresión

$$\text{Min } F_\mu(x)$$

s.a.

$$F_m(x) \leq \varepsilon_m, m=1, \dots, M \text{ y } m \neq \mu$$

Evaluando en  $X'$

$$F_m(x') \leq \varepsilon_m, m=1, \dots, M \text{ y } m \neq \mu \text{ genera Min } F_\mu(X')$$

$$X' \in S \text{ y } \exists \overline{x''} \in S : f_i(x'') \leq f_i(x') \text{ y } f_j(x'') \leq f_j(x') \text{ para al menos un } j$$

Pero  $X'$  minimiza  $F_\mu(x)$ , lo que contradice la definición de optimalidad de Pareto, por lo tanto

$X'$  es una solución óptima de Pareto (P.O.)  $\square$

Por otra parte, se prefirió el uso del método  $\varepsilon$ -restricción sobre el método de métricas ponderadas, ya que, además de las desventajas ya mencionadas, pequeños valores de  $\rho$  no generan todas las soluciones óptimas de Pareto, mientras que al incrementar  $\rho$ , el problema se vuelve no diferenciable, por lo que no se pueden usar diversos métodos basados en gradiente. Por otra parte, la variante de este método rotado requiere fijar  $rC2$  ángulos de rotación de ejes, donde  $r$  es el número de objetivos.

El método  $\varepsilon$ -restricción fue propuesto en los trabajos de Haimes (Chankong y Haimes, 1983, Haimes et. al. 1975), el cual se basa en un escalamiento donde una de las funciones objetivo es acotada por medio de restricciones adicionales

$$\min f_k(x) \tag{1.1}$$

s.a.

$$f_i(x) \leq \varepsilon_i \quad i \neq k \quad x \in X$$

Donde  $\varepsilon_k = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{k-1}, \varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_p)^T \in \mathbb{R}^{p-1}$  y  $k \in \{1, \dots, p\}$ . Se denota el conjunto factible del problema como:

$$X_k^\varepsilon := \{x \in X : f_i(x) \leq \varepsilon_i, i \neq k\}$$

**Teorema 1.3.**  $x^*$  es una solución eficiente de un problema biobjetivo si y sólo si

$\exists \varepsilon_2$  tal que  $x$  resuelve  $P_1(\varepsilon_2)$  o  $\exists \varepsilon_1$  tal que  $x^*$  resuelve  $P_2(\varepsilon_1)$ .

**Teorema 1.4.** Si  $x^*$  resuelve  $P_1(\varepsilon_2)$  o  $P_2(\varepsilon_1)$  y la solución es única, entonces  $x^*$  es una solución eficiente del problema biobjetivo.

Los teoremas 1.3 y 1.4 han sido demostrados para problemas multiobjetivo generales en Chankong y Haimes (1985). Esto significa que las soluciones eficientes siempre se podrán encontrar por medio de problemas de  $\varepsilon$ -restricción.

El teorema 1.3 indica que por cada solución eficiente  $x^*$ , se puede encontrar una  $\varepsilon_j$  tal que  $x^*$  puedan resolver  $P_1(\varepsilon_j)$  o  $P_2(\varepsilon_j)$ , con esto, la frontera Pareto completa se puede encontrar resolviendo problemas de  $\varepsilon$ -restricción.

De acuerdo con Mavrotas (2007), el cálculo de la gama de las funciones objetivo sobre el conjunto eficiente no es una tarea trivial, mientras que el mejor valor es de fácil acceso como el óptimo de la optimización individual, el peor valor en el conjunto eficiente (valor nadir) no lo es. El enfoque más común es el cálculo de estos rangos de la tabla de ganancias (la tabla con los resultados de la optimización individual de las funciones objetivo  $p$ ). El valor nadir, por otra parte, suele aproximarse con el mínimo de la columna.

Un punto de atención es garantizar que la solución óptima del problema sea una solución eficiente, ya que si hay óptimos alternativos (que pueden mejorar una de las restricciones no vinculantes que correspondan a una función objetivo) la solución obtenida es una solución débilmente eficiente.

A fin de superar esta ambigüedad Mavrotas (2008) propone la transformación de las limitaciones de la función objetivo de igualdades incorporando explícitamente la holgura apropiada. Al mismo tiempo, la suma de estas variables de holgura se utiliza como un segundo término (con prioridad más baja) en la función objetivo para forzar a producir sólo soluciones eficientes. El nuevo problema se convierte de (1.1) en:

$$\min f_k(x) + \delta(s_i) \quad i \neq k \quad (1.2)$$

s.a.

$$f_i(x) + s_i \leq \varepsilon_i \quad i \neq k$$

$$x \in X$$

donde  $\delta$  es un número pequeño

Mavrotas (2007) realiza la siguiente proposición: la formulación anterior del método de  $\varepsilon$ -restricción produce sólo soluciones eficientes (que evita la generación de soluciones débilmente eficientes).

Prueba: Suponiendo que el problema (1.2) tiene óptimos alternativos y uno de ellos (representada como  $x'$ ) domina la solución óptima (representada como  $x$ ) obtenida del problema (1.2). Esto significa que el vector  $(z_1, e_2 + s_2, \dots, e_p + s_p)$  está dominado por el vector  $(z_1, e_2 + s_2', \dots, e_p + s_p')$ . O bien:

$$e_2 + s_2 \leq e_2 + s_2'$$

$$\begin{aligned}
 e_3 + s_3 &\leq e_3 + s_3' \\
 \dots & \\
 e_p + s_p &\leq e_p + s_p'
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$

Tomando la suma de estas relaciones y basada en el hecho de que hay al menos una desigualdad estricta se llega a la conclusión de que:

$$\sum_{i=2}^p s_i - \sum_{i=2}^p s_i'$$

Pero esto contradice la suposición inicial de que la solución óptima de (1.2) maximiza la suma de  $S_i$ .

Por lo tanto, no hay ninguna solución  $x'$  que domina la solución obtenida  $x$ , o, en otras palabras la solución  $x$  obtenida es eficiente.  $\square$

El método  $\varepsilon$ -restricción trabaja predefiniendo una cuadrícula virtual en el espacio objetivo y resolviendo diferentes problemas de un solo objetivo restringidos a cada celda de la cuadrícula. Todas las soluciones óptimas de Pareto pueden ser encontradas sólo si la malla es lo suficientemente fina como para que a lo sumo una solución óptima de Pareto se encuentre en cada célula. Para un problema general, la elección del parámetro del tamaño de la malla es por lo tanto, no sólo muy difícil, sino que también influye en el tiempo de ejecución del algoritmo.

Los pasos para seguir en el método  $\varepsilon$ -restricción propuestos se muestran en la figura 1.1 y se describen a continuación:

- Colocar  $k_1(k)$  como el primer objetivo a considerar,  $km_1(k)$  los demás objetivos.
- Colocar  $kk(k)$  a la función objetivo como restricción en una sola expresión, esto se hace con las funciones objetivo diferentes a  $k_1(k)$ .
- Optimizar el primer objetivo y los otros se ponen como restricciones. El segundo término es para evitar puntos débilmente eficientes:

$$\text{augm\_obj} = \text{sum}(k_1, \text{dir}(k_1) * z(k_1)) + 1e-3 * \text{sum}(km_1, \text{sl}(km_1) / (\text{maxobj}(km_1) - \text{minobj}(km_1))) = a\_objval;$$

- Generar la tabla de ganancias con optimización lexicográfica.
- Liberar los valores fijos de las funciones objetivo para una nueva iteración.
- Definir diferentes intervalos de red para diferentes objetivos.
- Caminar por los puntos de la malla y tomar atajos, si el modelo se vuelve factible.

- Seguir adelante en la red.
- Obtener soluciones únicas del archivo de puntos.

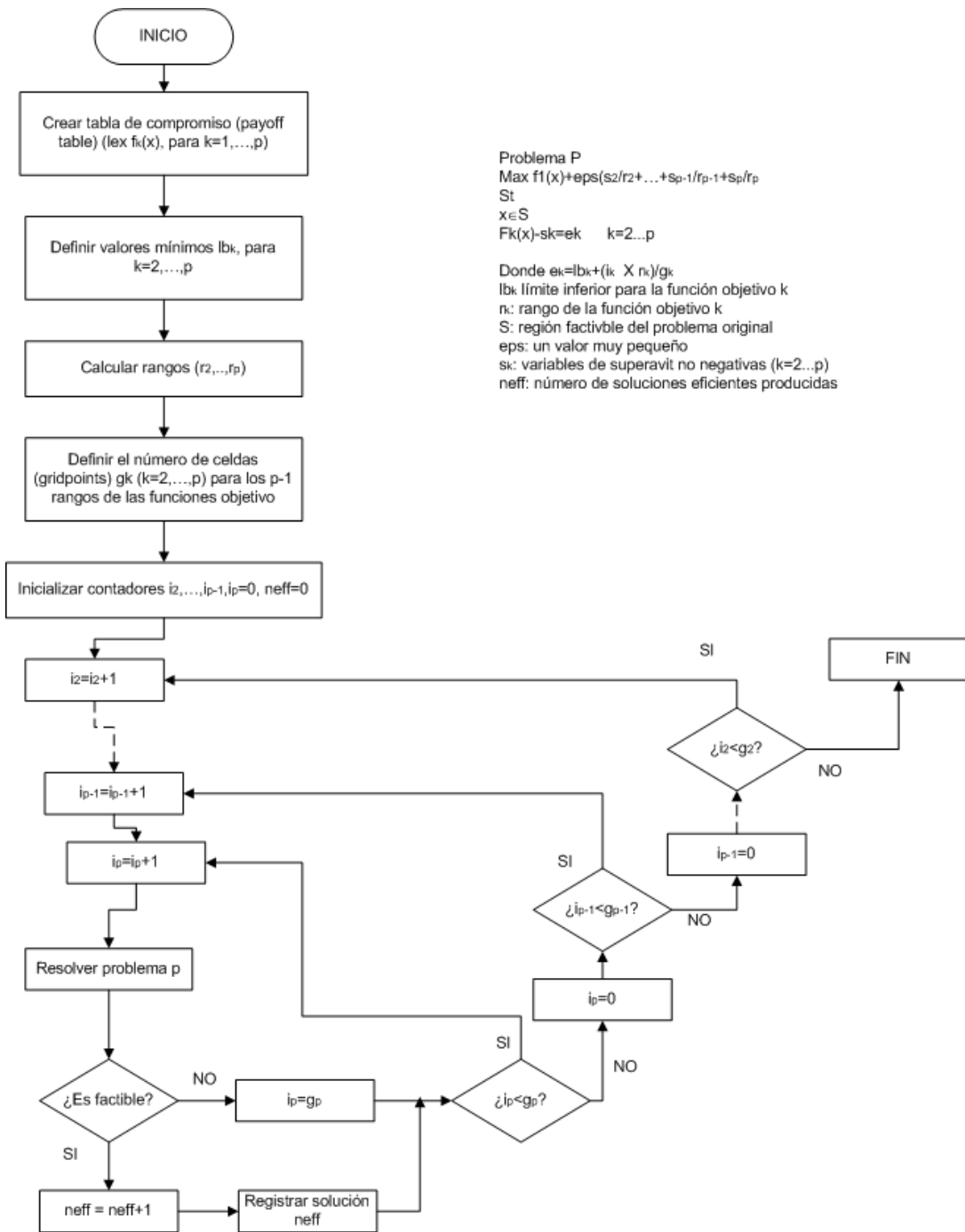


Figura 1.1 Diagrama de flujo modelo  $\epsilon$ -restricción

Fuente: Mavrotas (2007)

## 1.3 Problema de ruta más corta multiobjetivo (MSPP)

Este problema ha sido estudiado desde finales de los 70s. Hansen (1979) trabajó con problemas relacionados con encontrar las rutas más cortas para dos objetivos. En ese trabajo se probó la existencia de una familia de problemas con un número exponencial de soluciones óptimas, lo que implica que cualquier algoritmo que resuelva el MSPP es exponencial en el análisis del peor caso.

Un trabajo subsecuente (Henig, 1985) presenta algunos métodos para encontrar la ruta más corta en redes con dos objetivos. En esa publicación se describe como encontrar las rutas no dominadas. Por otra parte, Warburton (1987) usó una aproximación tipo Pareto para encontrar rutas más cortas con objetivos múltiples. Dado que el conjunto de rutas obtenidas es un subconjunto de todas las soluciones eficientes y puede ser estimado por métodos estándares, sin embargo, al ser una aproximación, tiene la desventaja de que algunas soluciones eran sobre estimadas, ya que el método buscaba que estuvieran dentro de un rango de precisión  $\varepsilon$ .

En 1998, Murthy and Sarkar (1997; 1998) trabajaron con un algoritmo de corrección de etiqueta, adaptándolo para dos o más objetivos. Como resultado de ese algoritmo, se podía obtener un conjunto de rutas no dominadas. Ellos analizaron el algoritmo de corrección de etiqueta para ruta más corta considerándolo como una generalización del problema clásico de ruta más corta usado para un solo objetivo. Como resultado, se pudo obtener el conjunto de rutas como una simple revisión de todos los arcos.

Abundando en los algoritmos de objetivos múltiples, de acuerdo con Reinhardt y Pisinger (2009), una extensión del problema de la red de la selección de ruta más corta multiobjetivo con arcos de costos  $C_{ij}$  positivos y la función objetivo no aditiva para cada objetivo se puede describir en el siguiente modelo:

$$\min Z = \left( \sum_{(i,j) \in A} c_{ij}^1 x_{ij}, \dots, c_{ij}^r x_{ij} \right) \quad (1.4)$$

s.a.

$$\sum_{j \in N} x_{sj} - \sum_{j \in N} x_{js} = 1 \quad (1.5)$$

$$\sum_{j \in N} x_{tj} - \sum_{j \in N} x_{jt} = -1 \quad (1.6)$$

$$\sum_{j \in N} x_{ij} - \sum_{j \in N} x_{ji} = 0 \quad \text{for all } i \in N \setminus \{s, t\} \quad (1.7)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in A$$

Los problemas de ruta más corta que siguen esta estructura se encuentran entre los problemas más estudiados, sin embargo, los resultados relativos a los

problemas multiobjetivo son poco frecuentes. Reinhardt y Pisinger (2009) sugiere que puede ser debido al hecho de que el supuesto de monotonicidad en programación dinámica rara vez se cumple para estos problemas.

De acuerdo con Reinhardt y Pisinger, una ruta  $P$  es un óptimo de Pareto si no hay otra ruta  $P$  entre los mismos dos arcos mejor o igual en todas las entradas del vector de valor y en donde al menos una entrada sea mejor. El conjunto de rutas óptimas de Pareto de un origen  $s$  a un destino  $t$  es el conjunto de rutas de  $s$  a  $t$  con vectores de valor no-dominadas. Si el problema tiene más de un objetivo podría tener un número exponencial de rutas óptimas Pareto donde cada vector tiene un valor único.

En problemas con varios objetivos donde uno o más objetivos no se ajustan a la propiedad de monotonía, se debe utilizar el principio débil de optimalidad, que establece que una ruta óptima debe estar compuesta por sub-rutas que forman parte de una ruta óptima.

Dadas las características de los algoritmos de corrección de etiqueta, estos se utilizan para resolver problemas de red con varios objetivos no aditivos.

Para el pseudocódigo de este algoritmo, Reinhardt y Pisinger (2009) define  $C^1(P)$ . . .  $C^r(P)$  como la función de costo de una ruta  $P$ . Además, se define una función de mezcla, lo que, teniendo en cuenta dos tipos de etiquetas, devuelve solamente etiquetas que no están dominados de la unión de dos conjuntos. También define el conjunto  $Q$  que consta de los arcos con etiquetas no dominadas que no han sido utilizados para generar otras etiquetas.

Cada etiqueta está dada por  $(C^1(P), \dots, C^r(P), pred(p))$ , donde, como en el algoritmo de corrección de etiqueta para un objetivo,  $pred(P)$  es un puntero de la etiqueta que indica dónde se ha generado (desde donde sale el arco). El pseudocódigo presentado por Reinhardt y Pisinger para corrección de etiqueta modificada para varios objetivos es el siguiente:

### Label-correcting (G,s,t)

```
1:  $L_v \leftarrow \emptyset$  para todo  $v \in V \setminus \{s\}$ 
2:  $L_s \leftarrow \{(0, \dots, 0, \{s\})\}$ ;
3:  $Q \leftarrow \{s\}$ ;
4: while  $Q \neq \emptyset$  do
5:  $u \leftarrow$  extraer vértices de  $Q$ ;
6: for todos los arcos  $e_{uv}$  do
7:  $L'_v \leftarrow$  mezclar( $L_v, L_u \oplus \{e_{uv}\}$ );
8: if  $L'_v \neq L_v$  then
9:    $L_v \leftarrow L'_v$ ;
10:   $Q \leftarrow Q \cup \{v\}$ ;
11: end if
12: end for
```



13: *end while*

14: *return*  $L_v$  para todo  $v \in V$ ;

## 1.4 Desarrollo de problemas de transporte con problemas de flujo a costo mínimo

De acuerdo con Ahuja et. al. (1997) el grupo de problemas conocidos actualmente como problemas de transporte se estudió por primera vez por L.V. Kantorovich, en un artículo titulado Métodos matemáticos de la organización y planificación de la producción (1939). Kantorovich propone problemas diferentes en las siguientes direcciones:

- (i) la distribución del trabajo entre las distintas máquinas
- (ii) la distribución de las órdenes entre las empresas
- (iii) la distribución de materias primas, combustibles y factores de producción
- (iv) la minimización de residuos
- (v) el mejor plan de envíos de carga

A su vez, otro trabajo seminal en el área fue hecho por F. Hitchcock (1941) que describe por primera vez la forma estándar del problema de transporte. Él propone una interpretación geométrica de las dimensiones del transporte de mercancías desde las fábricas  $m$  a las ciudades  $n$ , y construyó una "región de posibilidades", en cuya frontera debe estar la solución óptima. Propone un método para encontrar los puntos fijos en esta frontera, llamados vértices, para generar mejores soluciones iterativamente expresando la función objetivo en términos de variables con valores de cero. Hitchcock también toma nota de la aparición de múltiples soluciones óptimas y de la degeneración.

Gran parte del desarrollo de lo que hoy conocemos como el problema de flujo a costo mínimo (MCF) y los métodos basados en redes puede ser atribuido a Ford y Fulkerson (1962).

De acuerdo con Ahuja et al. (1997), existe una variedad de métodos de solución para el problema de MCF que se describen en la literatura. Estos pueden ser clasificados en una serie de enfoques principales, a saber, primal, algoritmos duales, primal-dual y escalamiento. Por ejemplo, el ciclo negativo y primal simplex son los dos algoritmos primales, mientras que los métodos duales incluyen: rutas más cortas sucesivas y una especialización del método simplex dual para problemas de PL. El algoritmo Out-of-Kilter de Ford es tal vez el método primal-dual más conocido. Finalmente, existe una familia de algoritmos de relajación basados en "right-hand-side" o de escalamiento de costo.

Malhotra y Puri (1984) proporcionan una generalización del método Out-of-Kilter biobjetivo para resolver el problema del costo a flujo mínimo, considerando una capacidad uniforme para todos los arcos. Según los autores, esta idea puede ser modificada al problema general a partir del flujo a costo mínimo Biobjetivo (BMCF). Después de esto a principios de los noventa, Lee y Pulat (1991) y Pulat et al. (1992) utilizaron un conjunto de variables duales para cada objetivo, alternando entre el óptimo y la degeneración o el uso de soluciones eficientes para la versión continua del problema en la red biobjetivo de flujo y la programación paramétrica con el fin de generar las soluciones eficaces para el problema de flujo en redes enteras biobjetivo.

Sedeño-Noda y González-Martín (2000) desarrollaron un algoritmo de dos fases, donde el primer paso podría encontrar todos los puntos enteros en la frontera eficiente y en una segunda fase, se calcularon las soluciones eficientes que no se encuentran en la frontera eficiente.

Pulat et al. (1992) señaló que algunas de las soluciones factibles básicas no corresponden con los vectores objetivos no dominados. Según ellos, todas las soluciones factibles básicas se pueden encontrar mediante el envío de flujo solamente en el ciclo entre dos soluciones factibles básicas adyacentes. Sedeño-Noda y González-Martín (2000) parten sobre la base de estas ideas para construir su algoritmo que adapta al método network simplex de un solo objetivo.

Lee y Pulat (1993) investigó la estructura de las soluciones BMCF. De acuerdo con ellos, sea  $X_t$  y  $X_{t+1}$  dos soluciones BMCF con vectores objetivo de  $t$  y  $t+1$  que son topológicamente adyacentes en  $Y_N$ . Debido a la unimodularidad total de la matriz de restricción,  $X^t$  y  $X^{t+1}$  son integrales. Considerando un árbol  $T$  básico de  $X^t$  y sea  $(u, v)$  el arco no básico cuya inclusión en  $T$  da como rendimiento  $X^{t+1}$ . De acuerdo con estos autores, la unión de  $T$  y  $(u, v)$  contiene un ciclo único. Sea  $\delta^{UV} \in N$ , que indica la cantidad máxima de flujo que puede ser enviado a lo largo de este ciclo. El número de puntos enteros no dominados soportados no extremos de la línea que conecta  $Y^t$  y  $Y^{t+1}$  es igual a  $\delta^{UV} - 1$ . Además, dichos puntos enteros son equidistantes unos de otros.

Estos autores asumen que todos los puntos extremos no dominados y otros puntos de apoyo no dominados están explícitamente conocidos, debido a los triángulos consecutivos definidos con apoyo de puntos no dominados soportados.

Tarapata (2007) presentó un análisis de una selección de enfoques a los problemas multiobjetivo de ruta más corta, donde clasifica los problemas de ruta multiobjetivo. En cuanto a los flujos enteros, Hamacher, et al. (2007) en su revisión, se refiere a un trabajo previo de él (Hamacher, 1995), donde se desarrolla un algoritmo de tiempo polinomial para resolver el K-mejor MCF entero, que se extiende a un procedimiento de solución para el problema de ordenamiento máximo de flujo (MO), que minimiza la peor de las funciones objetivo individuales.

Mientras que Przybylski et al. (2006) llegó a la conclusión de que no es posible encontrar todo el conjunto de soluciones no dominadas utilizando solamente el algoritmo network simplex, Tarapata (2007) encontró que todos los enfoques que buscan una solución al problema BMCF constará de dos fases:

Fase 1. Buscar todos los enteros flujos eficientes de apoyo, y

Fase 2. Buscar todos los flujos de enteros eficientes no soportados.

Entre las obras que tienen en cuenta estas dos fases son Eusebio y Figueira (2009) y Raith y Ehrgott (2009). En el primer trabajo se ha desarrollado un algoritmo que trata al BMCF y sugiere la búsqueda de todas las soluciones no dominadas en un orden decreciente de las funciones objetivo. El conjunto de soluciones se determina mediante la exploración de un árbol branch-and-bound.

Como Eusebio y Figueira (2009), Raith y Ehrgott (2009) propuso un método de dos fases basado en la búsqueda de puntos no dominados compatibles y no compatibles por separado. Este método propuesto difiere de la propuesta por Eusebio y Figueira en el tratamiento que se da en el segundo paso, en lugar de árbol "branch-and-bound", estos autores utilizaron un flujo-k-mejor para encontrar las soluciones no soportadas.

- En la fase 1, encuentran soluciones eficientes extremas. Para ello, existen dos enfoques principales. Uno es utilizar el hecho de que las soluciones compatibles se obtienen como soluciones al problema de suma ponderada y el otro enfoque se basa en el método network simplex, en la que cada solución básica factible obtenida se representa a través de un árbol formado por un conjunto de arcos básicos con el flujo  $0 \leq x_a \leq u_a$ ; otros arcos tienen un flujo  $x = 0$  o  $x = u_a$ .
- En la fase 2, los puntos no dominados restantes se cuentan en un enfoque enumerativo, ya que no existe una caracterización teórica para el cálculo eficiente. El espacio de búsqueda en la fase 2 se limita a triángulos dados por dos puntos de apoyo. Con estos puntos, se espera que el espacio de búsqueda sea muy restringido debido a la información obtenida en la fase 1, de modo que los problemas pueden ser resueltos rápidamente.

También en el mismo año, Fonseca, Figueira y Resende (2009) muestran que el algoritmo de punto interior de solución inexacta factible primal-dual es una herramienta útil para resolver problemas multiobjetivo. Este trabajo difiere de Eusebio y Figueira (2009) y de Raith y Ehrgott (2009), porque se utiliza un algoritmo primal dual de punto interior.

Raith y Ehrgott (2009) extiende a las ideas de Hamacher (1995) en la búsqueda de una solución para el problema de flujo en red entero de orden lexicográfico máximo como un flujo de Pareto, que se basa en el hecho de que si  $x_1, \dots, x_K$  son los k mejores flujos de K con respecto al primer objetivo, es decir,  $c_1 x_1 \leq c_1 x_2 \leq \dots \leq c_1 x_K \leq c_1 x \forall x \in X_{flow}$ , entonces  $c_1 x_K > \min_{x \in X_{flow}} \max_{q=1, \dots, p} c_q x$   $c_1 x_K >$

$\min x \in X_{\text{flow}} \max_{q=1, \dots, p} c_q x$  implica que todas las soluciones de máximo ordenamiento están contenidos en  $\{x_1, \dots, x_K\}$ .

De acuerdo con la revisión de Hamacher et al. (2007), prácticamente todos los algoritmos para el problema clásico de flujo a costo mínimo multiobjetivo se están ejecutando en el marco del flujo a costo mínimo lexicográfico.

## 2 Modelo multiobjetivo de ruta más corta

---

Como se ha mencionado, en este trabajo se define el modelo multiobjetivo de flujo a costo mínimo (MMCF), los componentes que lo caracterizan y el planteamiento matemático que lo define.

Una vez definidas las características de los modelos MMCF, el siguiente paso es desarrollar un modelo.

### 2.1 Modelo multiobjetivo MCF

Para hacer frente a un problema de flujo a costo mínimo, se propone utilizar el algoritmo desarrollado por Raith y Ehrgott (2009), que corresponde a la teoría de redes en la fase 2 en lugar de un enfoque de branch-and-bound. El modelo matemático que ellos resuelven es una adaptación del modelo propuesto por Murthy y Sarkar (1997, 1998) para MSPP aplicado a MMCF, lo que modificaría al modelo de la ecuación (1.1) como sigue:

- $i$  Conjunto de índices de nodo origen de arco,  $i \in V$
- $j$  Conjunto de índices de nodo destino de arco,  $j \in V$
- $c_{ij}^r$  Costo relativo a usar el arco que va de  $i$  a  $j$  de acuerdo con el criterio  $r$ ,  $r=1,2,\dots,r$ ,  $(i,j) \in A$
- $x_{ij}$  Variable de decisión. Flujo del nodo  $i$  al nodo  $j$ ,  $i,j \in N$
- $b_i$  Capacidad/ demanda del nodo  $i$ ,  $i \in N$

$$\min \sum_{\{j:(i,j) \in A\}} C_{ij}^r x_{ij} \quad (2.1)$$

s.a.

$$\sum_{\{j:(i,j) \in A\}} x_{ij} - \sum_{\{j:(j,i) \in A\}} x_{ji} = b_i \text{ para todo } i \in N, \quad (2.2)$$

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij} \text{ para todo } i \in A$$



## **3 Experimentación y análisis**

---

En este capítulo se llevó a cabo la experimentación del modelo SMMCF desarrollado en el capítulo anterior. La estructura de este capítulo es la siguiente:

En el punto 3.1 se hizo una primera aplicación del  $\varepsilon$ -restricción para un modelo de transporte, la resolución es manual para ejemplificar cómo trabaja el modelo. En el punto 3.2 se resolvió el mismo modelo de transporte, pero con su implementación en GAMS, como la propone Mavrotas (2007), para mostrar cómo se forma una frontera Pareto más completa.

En el punto 3.3 se da la aplicación a un ejemplo de flujo a costo mínimo con dos objetivos. En este punto se realizan varias instancias, con tamaños de entre 10 y 46 nodos, esto con la finalidad de mostrar cómo crece el tiempo de ejecución de manera exponencial con respecto al número de nodos en la red.

### **3.1 Ejemplo de aplicación del modelo $\varepsilon$ -restricción en un problema de transporte**

En primera instancia, se aplicó el modelo  $\varepsilon$ -restricción en un problema sencillo de transporte, esto para ejemplificar su funcionamiento, los datos del problema se muestran a continuación:

**Tabla 3.1 Capacidad/demanda en ejemplo de transporte (piezas)**

Capacidad	
x1	350
x2	600
Demanda	
x3	325
x4	300
x5	275

Fuente: elaboración propia

**Tabla 3.2 Costos de transporte (unidades monetarias)**

Cij	x3	x4	X5
x1	2.5	1.7	1.8
x2	2.5	1.8	1.4

Fuente: elaboración propia

**Tabla 3.3 Tiempos de traslado (unidades de tiempo)**

Tij	x3	x4	X5
X1	2	2.5	3
x2	2	2.5	3.3

Fuente: elaboración propia



Para resolver el problema usando  $\varepsilon$ -restricción, se debe minimizar primero con respecto a la primera función objetivo, una vez obtenido  $Z_1=1840$ , este valor se toma como restricción en la siguiente función objetivo, quedando la nueva función objetivo como se muestra:

$$\text{Min } Z_2 = 2x_{13}+2.5x_{14}+3x_{15}+2x_{23}+2.5x_{24}+3.3x_{25}$$

Sujeto a

$$x_{13}+x_{14}+x_{15} \leq 350$$

$$x_{23}+x_{24}+x_{25} \leq 600$$

$$x_{13}+x_{23} \geq 325$$

$$x_{14}+x_{24} \geq 300$$

$$x_{15}+x_{25} \geq 275$$

$$2.5x_{13}+1.7x_{14}+1.8x_{15}+2.5x_{23}+1.8x_{24}+1.4x_{25} = 1840$$

Esta actividad se realiza invirtiendo el orden en que se resuelven las funciones objetivo, quedando la siguiente tabla de ganancias:

**Tabla 3.4 Tabla de ganancias en ejemplo**

	f1(x)	f2(x)
min f1(x)	1707.5	2225
min f2(x)	1840	2307.5

Fuente: elaboración propia

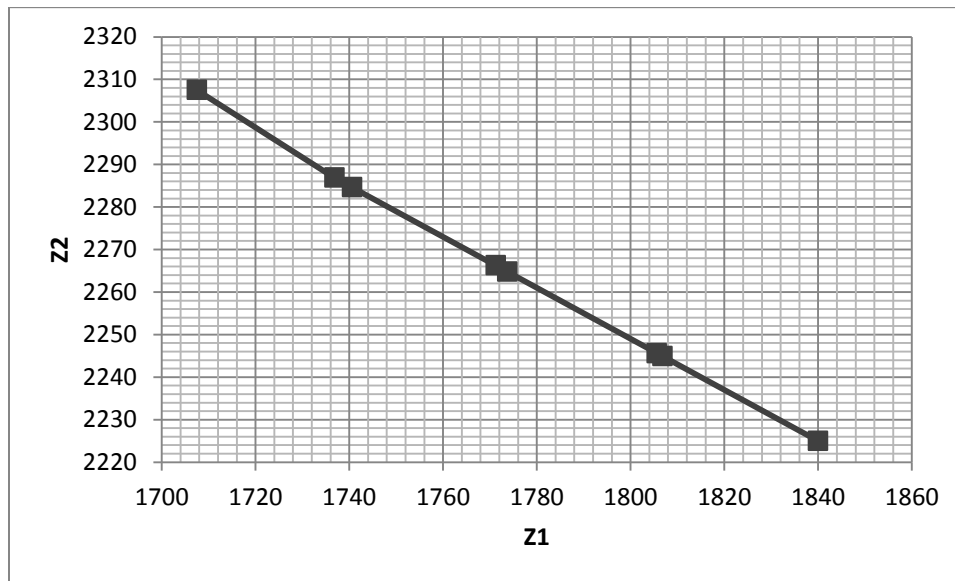
Utilizando cinco intervalos para el rango de cada uno de las f.o. se obtiene la siguiente malla:

**Tabla 3.5 valores resultantes del  $\varepsilon$ -restricción implementación manual**

e2	z1		e1	z2
2225	1840		1707.5	2307.5
2245.625	1805.63		1740.625	2284.63
2266.25	1771.25		1773.75	2264.75
2286.875	1736.87		1806.875	2244.88
2307.5	1707.5		1840	2225

Fuente: elaboración propia

A partir de estos valores se obtiene la frontera eficiente, mostrada en la figura 3.1:



**Figura 3.1. Frontera eficiente para el problema de transporte de ejemplo**

Fuente: elaboración propia

## 3.2 Corrida en GAMS del modelo $\epsilon$ -restricción

El algoritmo está basado en una aplicación de GAMS desarrollada por Mavrotas (2007), el cual a partir de las funciones objetivo genera la tabla de ganancias, a partir de la que se obtiene el rango de cada una de las funciones objetivo que se van a utilizar como restricciones.

Luego se divide el rango de la función objetivo  $i$ -ésimo a intervalos iguales con  $q_i$  ( $q_i-1$ ) los puntos intermedios de red equidistantes. Con esto se obtiene un total de ( $q_i + 1$ ) puntos de la cuadrícula que se utilizan para variar paramétricamente el lado derecho (IE) de la función objetivo  $i$ .

El número total de corridas se convierte en  $(q_2 + 1) \times (q_3 + 1) \times \dots \times (q_p + 1)$ . Cuanto mayor sea el número de celdas de la malla, será más densa la representación del conjunto eficiente, pero con un costo de tiempos de cálculo más alto. Se espera un intercambio entre la densidad del conjunto eficiente y el tiempo de cálculo.

El programa se ha aplicado a un problema de asignación multiobjetivo, se hizo la adecuación para un problema MMCF. La implementación se muestra en el Apendice A.

En primer lugar se aplicó el modelo al mismo problema de transporte, dado que el programa permite realizar una malla más fina que al hacerlo de manera manual, los datos que arrojó el programa fueron los siguientes:

**Tabla 3.6 puntos eficientes de la implementación en GAMS de un ejemplo de transporte**

Costo	Tiempo
1707.50	2307.50
1718.50	2299.25
1730.00	2291.00
1743.75	2282.75
1757.50	2274.50
1771.25	2266.25
1785.00	2258.00
1798.75	2249.75

1812.50	2241.50
1826.25	2233.25
1840.00	2225.00

Fuente: elaboración propia

### 3.3 Aplicación a un ejemplo de flujo a costo mínimo con dos objetivos

El código para aplicación del método de  $\varepsilon$ -restricción a un modelo MMCF con dos objetivos se muestra en el apéndice A, la instancia en el código corresponde a una red con 17 arcos y 10 nodos, de los cuales se tienen dos orígenes y dos destinos. La frontera Pareto obtenida se muestra a continuación. Los datos de entrada ocupados siguen las características propuestas para el modelo MMCF en el punto 3.1

**Tabla 3.7 Resultados de implementación en GAMS de un ejemplo MMCF**

Costo	Tiempo
54.00	111.00
56.40	106.20
58.80	101.40
61.20	96.60
63.60	91.80
66.00	87.00
68.40	82.20
70.80	77.40
73.20	72.60
79.80	67.80
99.00	63.00

Fuente: elaboración propia

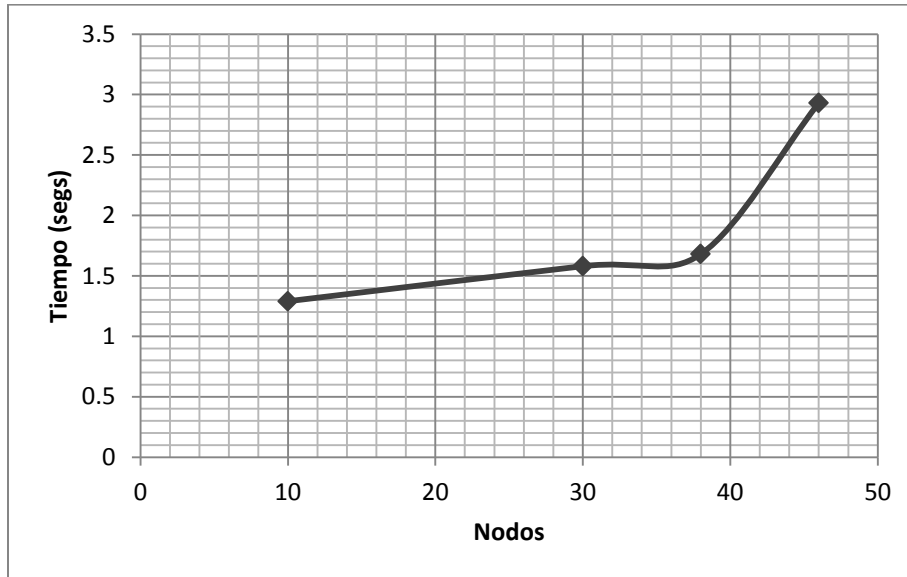
Asimismo, se aplicó esta implementación a instancias más grandes, la Tabla 3.8 muestra las características de las redes de dos objetivos que se resolvieron.

**Tabla 3.8 Instancias de MMCF resueltas con  $\varepsilon$ -restricción**

	<b>Programa A</b>	<b>Programa B</b>	<b>Programa C</b>	<b>Programa D</b>
Nodos	10	30	38	46
Orígenes	2	3	4	5
Destinos	2	3	4	5
Arcos	17	67	88	117
	Tabla de costos $C_{ij}$			
	Tabla de tiempos $T_{ij}$			

Fuente: elaboración propia

Se obtuvo una frontera Pareto para cada una de las instancias, en cuanto a los tiempos de ejecución de cada instancia, la Figura 3.2 muestra que los tiempos de ejecución crecen de manera exponencial con respecto al número de nodos que se tienen en la red.



**Figura 3.2 Tiempos de ejecución de la implementación en GAMS para distintos tamaños de problema**

Fuente: elaboración propia

## 4 Problema de aplicación

---

Como se mencionó, se tiene por objetivo ajustar el problema de flujo a costo mínimo, de modo que pueda responder a múltiples objetivos, como sería el encontrar el menor costo o el menor tiempo desde nodos de origen S a varios destinos o nodos T.

Como siguiente etapa, en Bustos y Herrera (2014) se propuso que este modelo se pusiera a prueba en el marco del comercio internacional E.E.U.U. - México de productos perecederos, en particular el problema de la exportación de productos perecederos de una región de México a destinos en el E.E.U.U.

### 4.1 Problema de transporte de perecederos

El problema se ejemplifica con un distribuidor de flores ubicados en el Tenango, Estado de México y en Tecamachalco, Puebla. Su principal cliente se encuentra en Chicago, Illinois, por lo que el transporte de flores es de gran importancia, como se ve en la Figura 4.1.

El objetivo es llevar flores sobre una base semanal, por lo que está buscando elegir la mejor ruta. Para ilustrar el proceso se consideraron tres empresas de transporte en el lado mexicano, que pueden utilizar dos tipos diferentes de unidades de transporte:

proveedor descripción del vehículo

A C2 Rabon

B C2 Rabon

C T3S2 remolque de 53'

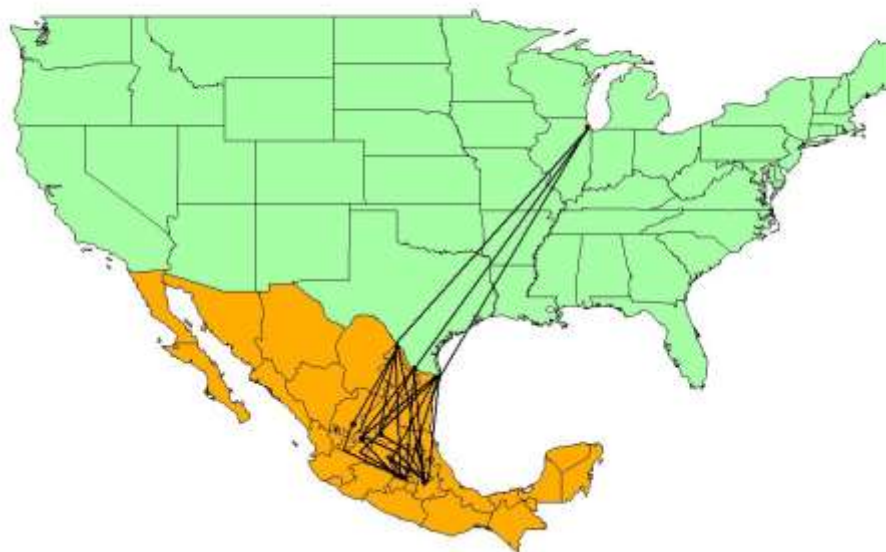
Cada ruta se caracteriza por la compañía proveedora de transporte, el tipo de unidad utilizada por el operador, el centro de transbordo (o si es un viaje directo a la frontera) y punto de cruce utilizado. En este ejemplo se utiliza un proveedor de servicios de transporte único en EE.UU.

A su vez, se pueden utilizar cuatro centros de transferencia que se encuentran en Querétaro, San Luis Potosí, Aguascalientes y Zacatecas, así como cuatro cruces fronterizos: Colombia, NL, Nuevo Laredo, Reynosa y Matamoros, Tamaulipas. Ver Figura 4.1.

En cada cruce fronterizo se tiene la opción de contratar a algún transportista especializado en cruzar la mercancía de un lado a otro de la frontera (transfer) o bien, hacerlo de manera directa por parte de un vehículo mexicano o estadounidense que tenga los permisos correspondientes para cruzar la frontera.

Dentro de las iniciativas bilaterales que se han desarrollado para garantizar un flujo seguro y eficiente de bienes se encuentra la de los carriles exclusivos FAST/Express, aplicable para empresas mexicanas que han sido certificadas en el programa Customs-Trade Partnership Against Terrorism (C-TPAT). Esto tiene como objetivo reducir los tiempos de espera en la frontera común generando un flujo más ágil de vehículos de carga en ambas direcciones.

La Figura 4.2 resume las actividades llevadas a cabo en la frontera entre México y EE.UU. y se muestra la caracterización de un cruce fronterizo. Donde un mismo cruce fronterizo (formado por el recuadro punteado) está formado por nodos A, B, C del lado mexicano y 1, 2 del estadounidense. De un origen  $O_i$  pueden viajar los vehículos directamente a la frontera mexicana o por medio de un centro de distribución  $c$ . Los arcos que llegan a los nodos A y B representan a dos vehículos C2 distintos mientras que a C llega el T3S2. El arco A-1 representa el cruce por medio de servicio de “transfer”, mientras que en C-1 se realiza por T3S2 y C-2 por T3S2 usando el carril “Fast”:



**Figura 4.1. Mapa básico para el transporte de las flores**

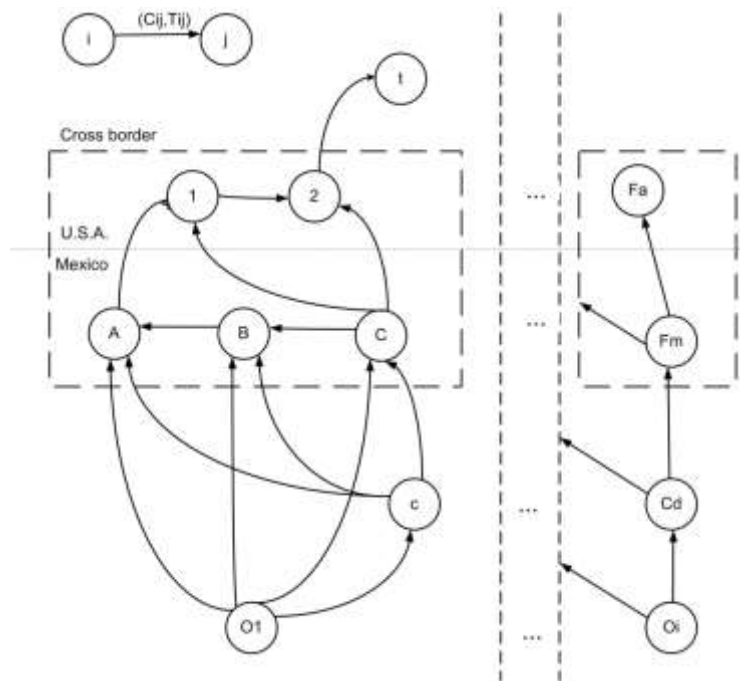
Fuente: elaboración propia



Dentro de los datos de entrada se encuentran los siguientes:

- Conjunto de nodos, identificando los nodos de origen, de destino y nodos de transbordo.
- Conjunto de objetivos, se identifica el número de objetivos y la dirección de optimización (minimizar o maximizar).
- Tabla de costos. Son datos determinísticos que identifican el costo de trasladar una unidad de flujo de un nodo  $i$  a un nodo  $j$  ( $i \neq j$ ).
- Tabla de tiempos determinísticos. Son datos determinísticos que identifican el tiempo de trasladar una unidad de flujo de un nodo  $i$  a un nodo  $j$  ( $i \neq j$ ) a través de un arco  $(i,j)$ .
- Número de soluciones para el modelo  $\varepsilon$ -restricción. Mavrotas (2007) identifica la relación de compromiso entre el número de soluciones obtenidas por el modelo y el tiempo de ejecución.

A continuación se detallan los atributos de los arcos de costo y tiempo.



**Figura 4.2 Proceso simplificado de cruce fronterizo**

Fuente: elaboración propia

## 4.2 Atributos del servicio de transporte

Los atributos de transporte considerados en el trabajo son los siguientes:

### 4.2.1 Costo

Esto se refiere a la cantidad de recursos consumidos para la realización del transporte dada su eficiencia, como la generación de riqueza y los ingresos por transporte de mercancías y personas.

Para el caso de productos perecederos, dado que estos tienen un tiempo de vida limitada, se establece un tiempo de vida mínimo en anaquel. Para que se pueda cumplir con el tiempo de vida en anaquel, el tiempo de transporte no debe exceder de un valor  $t_{an}$ , ya que cada unidad de tiempo que se exceda en el transporte representará un deterioro en el estado de la mercancía. El deterioro en la mercancía se puede considerar como un aumento en el costo total de transporte, de tal manera que el costo total de transporte la ecuación (4.1) correspondiente al segundo objetivo estaría representado como sigue:

$$\sum_{(i,j) \in P} C_{ij} X_{ij} + \sum_{(i,j) \in P} D_{ij} X_{ij} \quad (4.1)$$

Donde:

$C_{ij}$  es el precio de servicio de transporte en que se incurre al cruzar un arco dentro de la red.

$D_{ij}$  es el costo por deterioro de la mercancía debido al tiempo de transporte excedente a  $t_{an}$ .

$$\sum_{j \in V} t_{ij} \leq t_{an} \quad (4.2)$$

La restricción (4.2), por su parte, expresa que la suma de los tiempos en que se incurre en una ruta no puede ser mayor al tiempo máximo permitido para que el producto perecedero tenga un tiempo mínimo de exposición en aparador.

### 4.2.2 Tiempo

La relación entre el tiempo para pasar de un punto dado a otro, y la distancia a recorrer por ello, es conocida como la velocidad. Sin embargo, en la operación de transporte, es útil distinguir entre dos tipos de velocidades: velocidad física y de negocios. El primero se refiere a las características intrínsecas técnicas de cada modo de transporte. El segundo incluye, además de las restricciones de circulación, como detenciones y obstrucciones por parte de otros vehículos o usuarios del sistema.

Uno de los objetivos a considerar es minimizar el tiempo total de transporte desde los orígenes hasta los destinos finales. Para esto, los datos de tiempo para los arcos se consideran determinísticos.

Para el atributo de tiempo de recorrido, la ecuación (4.3) correspondiente al objetivo de tiempo quedaría modificada como sigue:

$$\sum_{(i,j) \in P} E[t_{ij}]X_{ij} \quad (4.3)$$

Donde:

$E[t_{ij}]X_{ij}$  es el valor esperado (considerado como determinístico) del tiempo de cruzar un arco dentro de la red

Los objetivos de minimizar tiempo y de minimizar costo pudieran ser contradictorios, ya que opciones más baratas de transporte se esperaría que fueran más lentas, mientras que opciones más rápidas se esperarían más caras. Sin embargo, en la relación costo – tiempo, al superar el tiempo  $t_{an}$ , el costo por disminución de la vida útil por deterioro de la mercancía podría volver una opción más lenta en una más cara. La Figura 4.3 muestra la frontera Pareto esperada para esta relación, como puede observarse, a partir del tiempo  $t_{an}$  el costo tendería a subir nuevamente, por lo que las opciones que superaran ese tiempo nos brindarían exclusivamente soluciones dominadas. Para evitar que el modelo matemático busque opciones en un área donde sólo habría soluciones dominadas, se puede establecer una restricción que impida que el tiempo de transporte sea mayor a  $t_{an}$ .

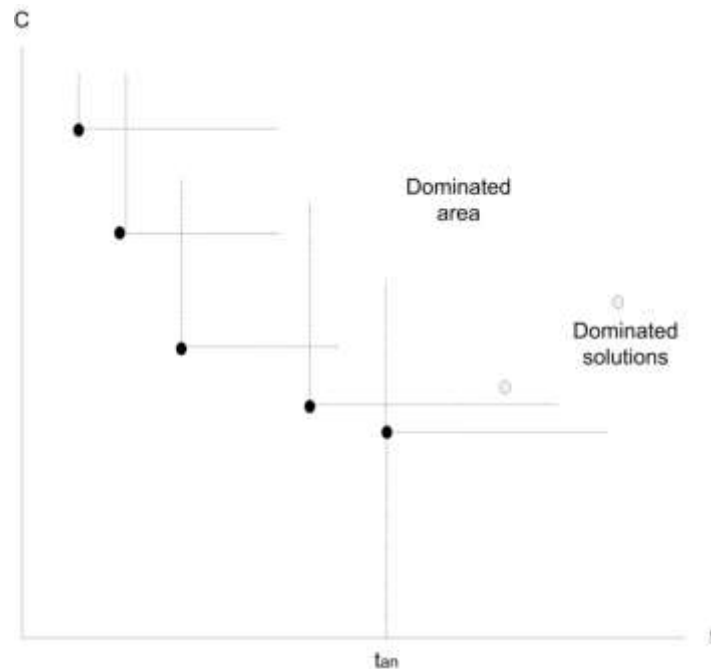


Figura 4.3 Relación costo - tiempo

## 4.3 Resultados

Se realizó una consulta de tiempos de cruce el 5 de julio 2010, de 9 a 22 horas en el sitio web del Departamento de Seguridad Nacional (DHS). Se observó que se dan mayores retrasos en las filas en las aduanas en Laredo y Laredo-Colombia, sin embargo, esto puede verse afectado por factores climáticos que han afectado el tráfico en la carretera Nuevo Laredo, México en esa época.

Se forma una red de 29 nodos y 158 arcos, de los cuales 12 –que representan los cruces fronterizos– pueden tomar tres estados de tiempo: bajo, medio, alto.

Con esto se generan las opciones de tiempo y costo que posteriormente alimentan el método de  $\epsilon$ -restricción. La implementación correspondiente se puede observar en el Apéndice B.

## 5 Conclusiones

---

### Conclusión

Se ha demostrado que el método  $\varepsilon$ -restricción puede utilizarse de manera eficiente para encontrar el problema de Pareto multiobjetivo exacta.

El enfoque desarrollado por SMMCF es generalizable a los problemas con las siguientes características:

- Los productos perecederos, en los que el tiempo de transporte tiene un impacto significativo.
- Mercados con múltiples orígenes y destinos.
- Selección de rutas basado en los proveedores con capacidades diferentes, los costos y los servicios de tiempo, dependiendo de las características de su flota.









## Bibliografía

---

Bedair, H. M. & H. T. Al-Saad. *Dissolved and Particulate Adsorbed Hydrocarbons in Water of Shatt Al-Arab River, Iraq. Water, Air, Soil Pollution. Iraq* (1992).

Bidleman, T. F.; A. A. Castleberry; W. T. Foreman; M. T. Zaransk & D. W. Wall. *Petroleum Hydrocarbons in the Surface Water of Two Studies in the Southeastern United States. Est. Coast Shelf Science. Estados Unidos* (1990).

PEMEX. *El Petróleo. Gerencia de Información y Relaciones Públicas. México* (1988).

Saval, B. S. *Acciones para la Remediación de Suelos en México. Segundo Minisimposio Internacional sobre Contaminantes del Agua y Suelo. Instituto de Ingeniería. UNAM* (1995).

Ahuja, R., Magnanti, T., Orlin, J. 1997. *Network Flows, Theory, algorithms and applications. Prentice Hall.*

Bazaraa, M., Jarvis, J. and Sherali, H. 2005. *Linear Programming and Network Flows. John Wiley and Sons. Inc.*

Bertsekas, D.P. 1985 *A Unified Framework for Primal Dual Methods in Minimum Cost Network Flow Problems. Mathematical Programming Volume 32 p125-145.*

Bertsekas, D.P., and Eckstein, J. 1988. *Dual Coordinate Step Methods for Linear Network Flow Problems. Mathematical Programming Series B Volume 42 p203-243.*

Bertsekas, D.P., and Tseng, P. 1988. *Relaxation Methods for Minimum Cost Ordinary and Generalised Network Flow Problems. Operations Research Volume 36 p93-114*

Bertsekas, D. and Tsitsiklis, J. 1991. *An Analysis of Stochastic Shortest Path Problems. Mathematics of Operations Research, Vol. 16, pp. 580-595*

Berube, J.F., Gendreau, M., Potvin, J.Y. 2007. *An exact e-constraint method for bi-objective combinatorial optimization problems. Application to the traveling salesman problem with profits. CIRRELT-2007-05*

Blander, L. and Pisnger, D. 2009. Multi-Objective and Multi-Constrained Non-Additive Shortest Path Problems. Department of Management Engineering. Technical University of Denmark.

Bookbindera, J. H. and Fox, N. S. 1998. Intermodal routing of Canada–Mexico shipments under NAFTA. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*. Volume 34, Issue 4, December 1998, Pages 289-303

Burke, E. and Kendall, G. 2005. *Introductory tutorials in optimization and decision support techniques* Springer

Bureau of Transportation Statistics. U.S. Department of Transportation. *Border Crossing. US-Mexico Border Crossing Data*. 2004

Bustos, A., Herrera, L. Jiménez, E. 2014. Efficient frontier for multi-objective transportation networks in international market of perishable goods. *Journal of Applied Research and Technology*. Vol. 12 No. 4. Pp. 654-665

Chankong, V. and Y. Haimes, 1983. *Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology*, Elsevier-North Holland.

Cinculuun, A. and Pardalos, P. 2007. A survey of recent developments in multiobjective optimization. *Annals of Operations Research*. 2007.154. pp.29–50

Chootinan, P. and Chen, A. 2005. Constraint handling in genetic algorithms using gradient-based repair method. *Computers & Operations Research*, vol. 33, no. 8, pp. 2263–2281, Aug. 2005.

Coello, C., Lamont, G. and Van Veldhuizen, D. 2007. *Evolutionary algorithms for solving multi-objective problems*. 2<sup>nd</sup> edition. Genetic and evolutionary computation series. Springer.

Das, S. K. , Goswami, A. and Alam, S. S. 1999. Multiobjective transportation problem with interval cost, source and destination parameters. *European Journal of Operational Research*. Volume 117, Issue 1, 16 August 1999, Pages 100-112

Deb, K. and Kumar, A. 2007. Interactive Evolutionary Multi-Objective Optimization and Decision-Making using Reference Direction Method. *GECCO'07*, July 7–11, 2007, London, England, United Kingdom.

Ehrgott, M. and Gandibleaux, X. 2000. An Annotated Bibliography of Multiobjective Combinatorial Optimization. *Operations Research & Decision Theory*. OR Spectrum. Volume: 22, Issue: 62, Publisher: Fachbereich Mathematik - University Kaiserslautern. pp. 425-460

Ehrgott, M. 2000. Approximation algorithms for combinatorial multicriteria optimization problems. *International Transactions in Operational Research*. 7 (2000) pp.5-31

Ehrgott, M. *Multicriteria Optimization*. 2005. Second Edition. Springer

El Colegio de la Frontera Norte. 2007. Estudio de puertos de entrada México-Estados Unidos: Análisis de capacidades y recomendaciones para incrementar su eficiencia. Reporte técnico

Enríquez, F. 1968. Problemática de la congestión portuaria. *Revista Obras Públicas*. 115, tomo I (3037). pp. 351-360. España.

Eusebio, A. and Figueira J. 2009. Finding non-dominated solutions in bi-objective integer network flow problems. *Computers & Operations Research* 36. pp. 2554 – 2564

Fonseca, M., and Figueira, J. and Resende, M. 2009. Solving scalarized multi-objective network flow problems with an interior point method. *International Transactions in Operational Research* Volume 17, Issue 5, pp. 607–636.

Ford, L.R., and Fulkerson, D.R. 1962. *Flows in Networks* (Princeton University Press, Princeton, New Jersey).

Haimes, Y.Y., W. A. Hall, and H. T. Freedman, 1975. *Multiobjective Optimization in Water Resources Systems: The Surrogate Worth Trade-off Method*. Elsevier Scientific Publishing Company.

Hamacher, H. 1995. A note on k best network flows. *Annals of Operations Research*, 57. pp.65–72.

Hamacher, H., Pedersen C. And Ruzika, S. 2007. Multiple objective minimum cost flow problems: A review. *European Journal of Operational Research*;176. Vol. 176, Issue: 3. pp. 1404-1422

Hansen, P. 1979 Bicriterion path problems, In: *Multiple Criteria Decision Making Theory and Application* (G. Fandel and T. Gal, Ed.). — Berlin: Springer, pp. 109–127.

Henig, M.I. 1985: The shortest path problem with two objective functions. *European Journal of Operational Research*, Vol. 25, No. 22, pp. 281–291

Hitchcock, F.C. 1941. The Distribution of a Product from Several Sources to Numerous Localities. *Journal of Maths Physics* Volume 20 p224-230.

Kelly, D. J., Garrett B.C. and O'Neill, M. 1991. The Minimum Cost Flow Problem and The Network Simplex Solution Method. A dissertation presented to the National University of Ireland

Lee, H., and Pulat, P.S. 1991. Bicriteria network flow problems: continuous case. *European Journal of Operational Research*; Vol. 51. pp. 119–126.

Lee, H., and Pulat, P.S. 1993. Bicriteria network flow problems: integer case. *European Journal of Operational Research* Vol. 66. pp. 148–157.

Malhotra, R., and Puri M.C. 1984. Bi-criteria network problem. *Cahiers du CERO*. Vol.26(1). pp. 95–102

Marler, R.T. and Arora, J.S. . 2004. Survey of multi-objective optimization methods for engineering. Review article. *Struct Multidisc Optim* 26, 369–395 (2004).

Martner, C., Morales, C., De la Torre, M., Bustos, A. 2005. Cadenas logísticas de exportación en México. *Publicación técnica 276*. Instituto Mexicano del Transporte.

Mavrotas, G. 2007. Generation of efficient solutions in Multiobjective Mathematical Programming problems using GAMS. 2007. Effective implementation of the  $\epsilon$ -constraint method. Lecturer, Laboratory of Industrial and Energy Economics, School of Chemical Engineering. National Technical University of Athens

Morales, C., De la Torre, M. Características del transporte refrigerado en México. *Publicación técnica 297*. México. 2006

Murthy, I. and Sarkar, S. 1997. Exact algorithms for the stochastic shortest path problem with a decreasing deadline utility function. *European Journal of Operational Research*. Volume 103, Issue 1, 16 November 1997, pp. 209-229

Murthy, I. and Sarkar, S.. 1998. Stochastic Shortest Path Problems with Piecewise-Linear Concave Utility Functions. *Management Science*, Vol. 44, No. 11, Part 2 of 2 Nov., 1998. pp. s125-s136

Przybylski, A., Gandibleux, X., Ehrgott, M. 2006. The biobjective integer minimum cost flow problem—incorrectness of Sedeño-Noda and Gonzalez Martin's algorithm. *Computers & Operations Research*; 33(5). pp. 1459–1463.

Pulat, P., Huarng, F., Lee, H. 1992. Efficient solutions for the bicriteria network flow problem. *Computers & Operations Research* 19(7). pp.649–655.

Raith, A. Ehrgott, M. 2009. A two-phase algorithm for the bi-objective integer minimum cost flow problem. *Computers & Operations Research* 36. pp. 1945–1954

Rangaiah, G.P. 2008. Multi-Objective Optimization, Techniques and Applications in Chemical Engineering. National University of Singapore.

Reinhardt, L. and Pisinger, D. 2009. Multi-Objective and Multi-Constrained Non-Additive Shortest Path Problems. Denmark Technical University. Department of Management Engineering.

Ruhe, G.1988. Complexity results for multicriteria land parametric network flows using a pathological graph of Zadeh. Zeitschrift für Operations Research;32. pp.9–27.

de Rus, G., Campos, J., Nombela, G, Economía del transporte 2003, España: Antoni Bosch.

Sedeño-Noda, A., Gonzalez Martin, C. 2000.The biobjective minimum cost flow problem. European Journal of Operational Research;124. pp.591–600.

Sedeño-Noda, A., Gonzalez Martin C. 2001. An algorithm for the biobjective integer minimum cost flow problem. Computers & Operations Research 2001;28. pp. 139–156.

Sunar, M., Kahraman, R. 2001. A Comparative Study of Multiobjective Optimization Methods in Structural Design. Turk Journal of Engineering Environment Science 25 (2001), 69 -78.

Takahama, T. and Sakai, S. 2006. Constrained Optimization by the "Constrained Differential Evolution with Gradient-Based Mutation and Feasible Elites. 2006 IEEE Congress on Evolutionary Computation.

Takahama, T. and Sakai, S. 2006. Solving Constrained Optimization Problems by the  $\epsilon$  Constrained Particle Swarm Optimizer with Adaptive Velocity Limit Control

Talbi, E., Metaheuristics: From Design to Implementation. 2009, Canada: John Wiley & sons inc.

Tarapata Z. 2007. "Selected multicriteria shortest path problems: an analysis of complexity, models and adaptation of standard algorithms". International Journal of Applied Mathematics and Computer Science. Vol. 17, No. 2. pp. 269–287.

Texas Transportation Institute. The Texas A&M University System Measuring Border Delay and Crossing Times at the U.S./Mexico Border. 2007

Ulungu E. and Teghem, J.1994. Multi-objective Combinatorial Optimization Problems: A Survey. Journal of Multi-Criteria Decision Analysis. Vol. 3. pp.83- 104.

Warburton, A. 1987. Approximation of Pareto optima in multiple-objective, shortest-path problems. *Operation Research*, Vol. 35, No. 1, pp. 70–79.

Weintraub, A. 1974. A Primal Algorithm to Solve Network Flow Problems with Convex Costs' *Management Science* Volume 21 p87-97.

White, D.J. 1990. A Bibliography on the Applications of Mathematical Programming Multiple-Objective Methods. *The Journal of the Operational Research Society*, Vol. 41, No. 8 (Aug., 1990), pp. 669-691.







# Anexo 1

---

El algoritmo que se utilizó para el problema de ruta más corta es el de Dijkstra, el cual identifica partiendo de un nodo de un grafo, el camino de coste mínimo entre este nodo y el resto de nodos que conforman el grafo.

El algoritmo se puede describir en los siguientes pasos:

Teniendo un grafo dirigido ponderado de  $N$  nodos no aislados, sea  $x$  el nodo inicial, un vector  $D$  de tamaño  $N$  guardará al final del algoritmo las distancias desde  $x$  al resto de los nodos.

1. Inicializar todas las distancias en  $D$  con un valor infinito relativo ya que son desconocidas al principio, exceptuando la de  $x$  que se debe colocar en 0 debido a que la distancia de  $x$  a  $x$  sería 0.
2. Sea  $a = x$  (tomamos  $a$  como nodo actual).
3. Recorremos todos los nodos adyacentes de  $a$ , excepto los nodos marcados, llamaremos a estos  $v_i$ .
4. Si la distancia desde  $x$  hasta  $v_i$  guardada en  $D$  es mayor que la distancia desde  $x$  hasta  $a$  sumada a la distancia desde  $a$  hasta  $v_i$ , ésta se sustituye con la segunda nombrada, esto es: si  $(D_i > D_a + d(a, v_i))$  entonces  $D_i = D_a + d(a, v_i)$ .
5. Marcamos como completo el nodo  $a$ .
6. Tomamos como próximo nodo actual el de menor valor en  $D$  (puede hacerse almacenando los valores en una cola de prioridad) y volvemos al paso 3 mientras existan nodos no marcados.

Una vez terminado al algoritmo,  $D$  estará completamente lleno.

El pseudocódigo del algoritmo de Dijkstra es el siguiente:

```
DIJKSTRA (Grafo G, nodo_fuente s)
// inicializamos todos los nodos del grafo. La distancia
// de cada nodo es infinita y los padres son NULL
for u ∈ V[G] do
    distancia[u] = INFINITO
    padre[u] = NULL
next for
distancia[s] = 0
//encolamos el nodo_fuente s
Encolar (cola, grafo)
mientras cola no es vacia do
    // Se extrae el nodo que tiene distancia minima y se
    conserva la condición de Cola de prioridad
    u = extraer_minimo(cola)
    for v ∈ adyacencia[u] do
        if distancia[v] > distancia[u] + peso (u, v) do
            distancia[v] = distancia[u] + peso (u, v)
            padre[v] = u
        fin-if
    Next for
fin-mientras
```

El algoritmo Dijkstra se desarrolló en Java. Se compone de dos archivos, Nodo.java y multiobjetivo. El primero tiene la clase principal del programa y el segundo contiene la interacción con el usuario.

El programa desarrollado se aplicó a una instancia de 29 nodos y se compararon los resultados con un programa en GAMS, obteniéndose los mismos resultados pero con la ventaja de que, al ser un desarrollo en Java, puede ser ejecutable sin necesidad de comprar software extra. A continuación se muestra la pantalla de captura. Como puede observarse, el programa pregunta cuántos nodos tiene la red y cuál es el nodo de inicio, así como el archivo de texto en el que se encuentran los datos de distancias.





Carretera Querétaro-Galindo km 12+000  
CP 76700, Sanfandila  
Pedro Escobedo, Querétaro, México  
Tel +52 (442) 216 9777 ext. 2610  
Fax +52 (442) 216 9671

[publicaciones@imt.mx](mailto:publicaciones@imt.mx)

<http://www.imt.mx/>